

# 正則曲面上のフロンタルと接触可展面

(Osculating developable surfaces of regular surfaces along frontals)

本多 俊一

HONDA Shun'ichi

北海道大学大学院理学院数学専攻

## 1 概要

正則曲面上の正則曲線はダルブー枠 (Darboux frame) を用いて、その性質が広く知られている。しかし、曲線が特異点を持つ場合はこの限りではない。本講演では、ユークリッド平面  $\mathbb{R}^2$  上のフロンタル ([2]) を一般化した正則曲面  $M$  上のフロンタルを定義し、[3] における正則曲面  $M$  上の正則曲線に沿った接触可展面の一般化として、正則曲面  $M$  上のフロンタルに沿った接触可展面を定義し、その性質を紹介する。その際、「[4] における枠付き曲線」及び「[5] における球面ルジャンドル曲線」の理論を応用する。なお、本講演は泉屋周一氏 (北海道大学)、高橋雅朋氏 (室蘭工業大学) との共同研究に基づく。

## 2 正則曲面上のフロンタル

$I$  を開区間または  $\mathbb{R}$ ,  $U$  を開領域または  $\mathbb{R}^2$  とする。埋め込み  $\mathbf{X} : U \rightarrow M, (u, v) \mapsto \mathbf{X}(u, v)$  に対して、 $M = \mathbf{X}(U)$  を正則曲面と呼ぶ。さらに、正則とは限らない平面曲線  $\bar{\gamma} : I \rightarrow U, t \mapsto (u(t), v(t))$  に対し、空間曲線

$$\gamma = \mathbf{X} \circ \bar{\gamma} : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$$

を考える。正則曲面の単位法線ベクトルを  $\gamma$  上に制限したものを

$$\mathbf{n}_\gamma(t) = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} \circ \bar{\gamma}(t)$$

とする。また、単位接束  $T_1M$  を

$$T_1M = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M \times T_{\mathbf{x}}M \mid |\mathbf{y}| = 1\} \subset M \times S^2$$

とする。

**定義 2.1 (単位接束  $T_1M$  上のルジャンドル曲線)** 写像  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow T_1M$  が任意の  $t \in I$  に対して  $(\gamma, \nu)^*(t)\theta = 0$  を満たすとき、 $(\gamma, \nu)$  を正則曲面  $M$  上のルジャンドル曲線と呼ぶ。ここで、 $\theta$  は単位接束  $T_1M$  上の標準接触 1 次形式である。上記の条件は任意の  $t \in I$  に対して  $\dot{\gamma}(t) \cdot \nu(t) = 0$  を満たすことと同値である。さらに、 $(\gamma, \nu)$  がはめ込みのとき  $(\gamma, \nu)$  を正則曲面  $M$  上のルジャンドルはめ込みと呼ぶ。

定義 2.2 (正則曲面  $M$  上のフロントル) 正則曲面  $M$  上の曲線  $\gamma : I \rightarrow M$  に対して, ある  $\nu : I \rightarrow S^2$  が存在して  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow T_1M \subset M \times S^2$  がルジャンドル曲線であるとき,  $\gamma$  を正則曲面  $M$  上のフロントルと呼ぶ. さらに,  $(\gamma, \nu)$  がルジャンドルはめ込みのとき  $\gamma$  を正則曲面  $M$  上のフロントと呼ぶ.

注意 2.3  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow T_1M \subset M \times S^2$  がルジャンドル曲線であることと,  $(\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \nu) : I \rightarrow M \times S^2 \times S^2$  が枠付き曲線 (付録A, [4]) であることは同値である. 以下では,  $(\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \nu)$  が枠付き曲線であるとして議論を展開する.

### 3 接触可展面

枠付き曲線  $(\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \nu) : I \rightarrow M \times S^2 \times S^2$  の曲率を  $(\ell, m, n, \alpha)$  (付録A, [4]), 球面ルジャンドル曲線  $(\mathbf{n}_\gamma, \nu_n) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  の曲率を  $(m_n, n_n)$  とする (付録B, [5]).

このとき,  $\boldsymbol{\mu}(t) := \mathbf{n}_\gamma(t) \times \nu(t)$  及び  $\boldsymbol{\mu}_n(t) := \mathbf{n}_\gamma(t) \times \nu_n(t)$  とすると, 枠付き曲線  $(\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \nu)$  の枠  $\{\mathbf{n}_\gamma(t), \nu(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  と球面ルジャンドル曲線  $(\mathbf{n}_\gamma, \nu_n)$  の枠  $\{\mathbf{n}_\gamma(t), \nu_n(t), \boldsymbol{\mu}_n(t)\}$  に対して, 滑らかな関数  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して以下の関係を満たす:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n}_\gamma(t) \\ \nu_n(t) \\ \boldsymbol{\mu}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ 0 & \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_\gamma(t) \\ \nu(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix}.$$

定義 3.1 (接触可展面) 正則曲面  $M$  上のフロントル  $\gamma$  に沿った (Osculating developable surface) を  $OD_\gamma : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$OD_\gamma(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda \nu_n(t)$$

とする.

定義より  $OD_\gamma$  は線織面であるが,  $\det(\dot{\gamma}(t), \nu_n(t), \dot{\nu}_n(t)) = 0$  より,  $OD_\gamma$  は可展面である (付録C). 一方,  $(t_0, 0)$  が  $OD_\gamma$  の正則点であるとする. このとき,  $(t_0, 0)$  において  $OD_\gamma$  の法線ベクトルは  $\mathbf{X}$  の法線ベクトル  $\mathbf{n}_\gamma$  と同じ方向を持つ. これらの性質より,  $OD_\gamma$  を正則曲面上のフロントルに沿った接触可展面と呼ぶ.

以下で  $OD_\gamma$  と直交射影 (中心射影) (付録D) との関係を与える:

定理 3.2 上記の設定の下,  $\mathbf{n}_\gamma$  の正則点が稠密であるとする. このとき, 以下が成り立つ:

(A) 以下は同値である:

- (1)  $OD_\gamma$  は柱面である,
- (2)  $n_n(t) \equiv 0$ ,
- (3)  $\gamma$  は直交射影に関する輪郭母線である.

(B)  $n_n(t) \neq 0$  とする. このとき, 以下は同値である:

- (4)  $OD_\gamma$  は錐面である,
- (5)  $\alpha(t) \sin \theta(t) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha(t) \cos \theta(t)}{n_n(t)} \right) \equiv 0$ ,
- (6)  $\gamma$  は中心射影に関する輪郭母線である.

例 3.3 平面曲線  $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3, -t^2)$  と正則曲面  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u, v, (u^2 + v^3)^2)$  の合成  $\gamma = \mathbf{X} \circ \bar{\gamma}(t) = (t^3, -t^2, 0)$  を考える. このとき,  $\gamma$  は  $M = \mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$  上のフロントルである.

さらに接触可展面は  $OD_\gamma(t, \lambda) = (t^3, -t^2 + \lambda, 0)$  で与えられる.  $n_n(t) \equiv 0$  より,  $OD_\gamma(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  は柱面である (図1).

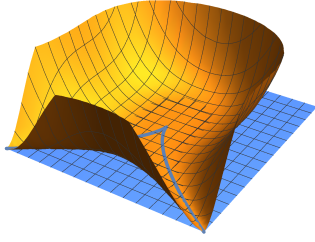


図1

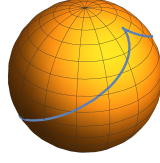


図2

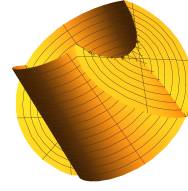


図3

**定理 3.4**  $M \subset \mathbb{R}^3$  を可展面とする. このとき,  $M$  の正則部分上の曲線  $\gamma$  に対して, ある  $\nu_n : I \rightarrow S^2$  が存在して,  $(\mathbf{n}_\gamma, \nu_n) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  は球面ルジャンドル曲線である. さらに,  $\mathbf{n}_\gamma$  の正則点が稠密なとき,  $OD_\gamma(I \times \mathbb{R}) \subset M$  が成り立つ.

非柱面的な  $OD_\gamma$  の特異点は以下で特徴付けられる:

**定理 3.5** 枠付き曲線  $(\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \nu) : I \rightarrow M \times S^2 \times S^2$  の曲率を  $(\ell, m, n, \alpha)$ , 球面ルジャンドル曲線  $(\mathbf{n}_\gamma, \nu_n) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  の曲率を  $(m_n, n_n)$  とする. このとき, 非柱面的な  $OD_\gamma$  に対して, 以下が成り立つ:

(1)  $OD_\gamma(t_0, \lambda_0)$  が正則点であるための必要十分条件は,

$$\alpha(t_0) \cos \theta(t_0) + \lambda_0 n_n(t_0) \neq 0$$

が成り立つことである.

(A)  $(t_0, \lambda_0)$  を  $m_n(t_0) \neq 0$  を満たす  $OD_\gamma$  の特異点とする. このとき, 以下が成り立つ:

(2)  $OD_\gamma$  が  $(t_0, \lambda_0)$  においてカスプ状曲面  $\mathbf{c}$  に局所微分同相であるための必要十分条件は,

$$\alpha(t_0) \sin \theta(t_0) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha(t_0) \cos \theta(t_0)}{n_n(t_0)} \right) \neq 0$$

が成り立つことである.

(3)  $OD_\gamma$  が  $(t_0, \lambda_0)$  においてツバメの尾  $\mathbf{sw}$  に局所微分同相であるための必要十分条件は,

$$\alpha(t_0) \sin \theta(t_0) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha(t_0) \cos \theta(t_0)}{n_n(t_0)} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \alpha(t_0) \sin \theta(t_0) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha(t_0) \cos \theta(t_0)}{n_n(t_0)} \right) \right) \neq 0$$

が成り立つことである.

(B)  $(t_0, \lambda_0)$  を  $m_n(t_0) = 0$  を満たす  $OD_\gamma$  の特異点とする. このとき, 以下が成り立つ:

(4)  $OD_\gamma$  が  $(t_0, \lambda_0)$  においてカスプ状交叉帽子  $\mathbf{cc}$  に局所微分同相であるための必要十分条件は,  $\dot{m}_n(t_0) \neq 0$  かつ

$$\alpha(t_0) \sin \theta(t_0) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha(t_0) \cos \theta(t_0)}{n_n(t_0)} \right) \neq 0$$

が成り立つことである.

ここで, カスプ状曲面  $\mathbf{c}$  は  $\mathbf{c}(u, v) = (u, v^2, v^3)$ , ツバメの尾  $\mathbf{sw}$  は  $\mathbf{sw}(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$ , カスプ状交叉帽子  $\mathbf{cc}$  は  $\mathbf{cc}(u, v) = (u, uv^3, v^2)$  である.

例 3.6 空間曲線  $\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow S^2$ ,

$$\gamma(t) = \left( \frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t, \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \right)$$

は  $S^2$  上のフロントルである (図 2). 実際,  $\gamma$  の双対  $\nu : [0, 2\pi) \rightarrow S^2$  は

$$\nu(t) = \left( \frac{3}{4} \sin t + \frac{1}{4} \sin 3t, -\frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \right)$$

である. このとき, 接触可展面  $OD_\gamma$  は  $\lambda = \tan t$  ( $t \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}$ ) でカスプ状曲面,  $(0, 0), (\pi, 0)$  でカスプ状交叉帽子である (図 3).

## 付録

### 付録 A 枠付き曲線 ([4])

$I$  を区間または  $\mathbb{R}$  とする.

定義 3.7 (枠付き曲線) 写像  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$  が次の 3 つの条件を満たすとき枠付き曲線 (framed curve) と呼ぶ:

$$(1) \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_1(t) = 0, (2) \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_2(t) = 0, (3) \nu_1(t) \cdot \nu_2(t) = 0.$$

特に,  $(\dot{\gamma}, \dot{\nu}_1, \dot{\nu}_2) \neq (0, 0, 0)$  を満たすとき,  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  を枠付きはめ込み (framed immersion) と呼ぶ.

枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$  に対して,  $\boldsymbol{\mu}(t) := \nu_1(t) \times \nu_2(t)$  とすると,  $\{\nu_1(t), \nu_2(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  は  $\gamma(t)$  に沿う正の枠で,

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}_1(t) \\ \dot{\nu}_2(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) & m(t) \\ -\ell(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix} \quad \dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{\mu}(t)$$

を満たす. このとき,

$$\ell(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \nu_2(t), \quad m(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t), \quad n(t) = \dot{\nu}_2(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t), \quad \alpha(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t)$$

である. この関数の組  $(\ell, m, n, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  を枠付き曲線の曲率と呼ぶ. 枠付き曲線の曲率は, パラメータのとり方に依存する.

2 つの枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2) : I \rightarrow \mathbb{R} \times S^2 \times S^2$  に対して, ある回転  $\mathbf{X} \in SO(3)$  及び平行移動  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  が存在して,

$$(a) \tilde{\gamma}(t) = \mathbf{X}(\gamma(t)) + \mathbf{x}, \quad (b) \tilde{\nu}_1(t) = \mathbf{X}(\nu_1(t)), \quad (c) \tilde{\nu}_2(t) = \mathbf{X}(\nu_2(t))$$

を満たすとき, 2 つの枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$  は合同であると言う.

定理 3.8 (枠付き曲線の存在) [4]  $(\ell, m, n, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  を滑らかな写像とする. このとき, 枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$  で,  $(\ell, m, n, \alpha)$  を曲率とするものが存在する.

定理 3.9 (枠付き曲線の一意性) 2 つの枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$  に対して, これらの曲率が一致するとする. このとき, 2 つの枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$  は合同である.

## 付録B 球面ルジャンドル曲線 ([5])

定義 3.10 (球面ルジャンドル曲線) 写像  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  が次の2つの条件を満たすとき球面ルジャンドル曲線 (spherical Legendre curve) と呼ぶ:

$$(1) \gamma(t) \cdot \nu(t) = 0, (2) \dot{\gamma}(t) \cdot \nu = 0.$$

特に,  $(\dot{\gamma}, \dot{\nu}) \neq (0, 0)$  を満たすとき,  $(\gamma, \nu)$  を球面ルジャンドルはめ込み (spherical Legendre immersion) と呼ぶ.

球面ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  に対して,  $\mu(t) := \gamma(t) \times \nu(t)$  とすると,  $\{\gamma(t), \nu(t), \mu(t)\}$  は  $\gamma(t)$  に沿う正の枠で,

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\nu}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m(t) \\ 0 & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす. このとき,

$$m(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \mu(t), n(t) = \dot{\nu}(t) \cdot \mu(t)$$

である. この関数の組  $(m, n) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を球面ルジャンドル曲線の曲率と呼ぶ. 球面ルジャンドル曲線の曲率は, パラメータの取り方に依存する.

2つの球面ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  に対して, ある回転  $X \in SO(3)$  が存在して,

$$(a) \tilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)), (b) \tilde{\nu}(t) = A(\nu(t))$$

を満たすとき, 2つの球面ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu})$  は合同であると言う.

定理 3.11 (球面ルジャンドル曲線の存在)  $(m, n) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を滑らかな写像とする. このとき, 球面ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  で,  $(m, n)$  を曲率とするものが存在する.

定理 3.12 (球面ルジャンドル曲線) 2つの球面ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  に対して, これらの曲率が一致するとする. このとき, 2つの球面ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu})$  は合同である.

## 付録C 線織面と可展面

空間曲線  $\gamma(t)$  とそのパラメータ  $t$  に依存する零でないベクトル  $\xi(t)$  およびパラメータ  $\lambda$  によって

$$F(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda\xi(t)$$

と表される曲面を線織面 (ruled surface) と呼ぶ.  $\gamma$  を導線 (base curve),  $\xi$  を準曲線 (director curve) と呼び,  $t$  を固定するごとに得られる直線  $\gamma(t) + \xi(t)$  を母線 (ruling) と呼ぶ. ガウス曲率が常に0であるような線織面を可展面 (developable surface) と呼ぶ. 線織面  $F(t, \lambda)$  が可展面であることの必要十分条件は, 任意の  $t \in I$  に対して,

$$\det(\dot{\gamma}, \xi(t), \dot{\xi}(t)) = 0$$

が成り立つことである．導線  $\xi$  を正規化し， $\tilde{\xi}(t) = \xi(t)/|\xi(t)|$  とする． $\dot{\tilde{\xi}}(t) \equiv 0$  であるとき， $F(t, \lambda)$  は柱面 (cylinder) であると言う．また， $\dot{\tilde{\xi}}(t) \neq 0$  であるとき， $F(t, \lambda)$  は非柱面的 (non-cylindrical) であるという． $F(t, \lambda)$  が非柱面的であるとき，

$$\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot \tilde{\xi}(t)}{\tilde{\xi}(t) \cdot \dot{\tilde{\xi}}(t)} \tilde{\xi}(t)$$

で表示される曲線を締括線 (striction curve) と呼び．線織面の特異点は締括線上に現れることが知られている．締括線が定点であるとき， $F(t, \lambda)$  は錐面 (cone) であると言う．

## 付録D 輪郭母線

$M \subset \mathbb{R}^3$  を正則曲面， $\mathbf{n}$  を  $M$  上の単位法線ベクトル場とする．単位ベクトル  $\mathbf{k} \in S^2$  に対して， $\mathbf{k}$  方向への直交射影の輪郭母線は

$$\{p \in M \mid \mathbf{n}(p) \cdot \mathbf{k} = 0\}$$

で与えられる．これは  $\mathbf{k}$  方向への直交射影の特異集合である．

一方，定点  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  に対して， $\mathbf{c}$  に対する中心射影の輪郭母線は

$$\{p \in M \mid (p - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}(p) = 0\}$$

で与えられる．これは  $\mathbf{c}$  に対する中心射影の特異集合である．輪郭母線の問題は映像理論において重要な役割を担っている ([1]).

## 参考文献

- [1] R. Cipolla, P. J. Giblin, Visual Motion of Curves and Surfaces, Cambridge Univ. Press (2000).
- [2] T. Fukunaga and M. Takahashi, Existence and uniqueness for Legendre curves, Journal of Geometry Vol.10 (2014) 92-107.
- [3] S. Izumiya and S. Otani, Flat approximations of surfaces along curves, Demonstratio Mathematica XLVIII (2) (2015) 217-241.
- [4] S. Honda and M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, to appear in Advances in Geometry (2015).
- [5] M. Takahashi, Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere and evolutes, to appear in Contemporary Mathematics (2016).