ON THE DESCENT OF CERTAIN MODULAR CALABI-YAU VARIETIES VIA THE CYNK-HULEK CONSTRUCTION

平川 義之輔 (Yoshinosuke Hirakawa)[1]

Abstract. S. Cynk と K. Hulek は, 低次元 Calabi-Yau 多様体から高次元 Calabi-Yau 多様体を帰納的に構成する方法を導入し, L 関数が保型形式で記述される (保型的な)Calabi-Yau 多様体の例を構成した. (Canad. Math. Bull., 2007, 486–503.) 本稿では, 彼らの方法に Weil 係数制限関手と K3 曲面 (Calabi-Yau 曲面) 上の固定点自由対合とを組み合わせることで, 有理数体上の保型的な Calabi-Yau 多様体の新たな例を構成する方法について述べる.

1. Introduction

この節では, 数論幾何において "代数多様体の L 関数と保型形式の L 関数との対応関係" が重要視される背景を (非常に大雑把に) 紹介した後, 本稿 §2 以降の構成を述べる.

数論幾何においては, Fermat 予想[2]に代表されるように, 代数体上の代数多様体[3]の数論的な性質を調べることが, 中心的な研究課題となっている. 特に, それらの代数多様体に付随する L 関数と呼ばれる複素解析関数は, もとの代数多様体の数論的な性質を著しく反映していると期待されているため, 最も重要な研究対象の 1 つである. 一方で, 代数多様体の L 関数の複素解析的な性質には未知な部分が多く, ミレニアム問題の 1 つである BSD 予想[4]に代表されるように, 数多くの未解決問題が存在する. それらの未解決問題の中でも, Hasse-Weil 予想[5]は最も基本的な位置を占めており, 実際有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線に対して Hasse-Weil 予想を証明することで, 初めて BSD 予想の厳密な定式化が可能となった. しかし, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線に対する Hasse-Weil 予想以上に, その証明に用いられた谷山-志村予想[6]は数論幾何に大きなインパクトをもたらし, 類似の性質を持つ代数多様体, あるいはそのコホモロジー群として生じる Galois 表現の研究が大きく進展した.

本稿では, 上述の谷山-志村予想に代表される "代数多様体の L 関数と保型形式の L 関数との対応関係" について, 著者により得られた結果 (Theorem 4.1) の紹介を行う. §2 では, 基本的な用語を導入した後, 本稿で紹介する諸研究の動機である B. Mazur と D. van Straten による問題 (Problem 2.4) を紹介する. §3 では, この問題に対する先行結果を紹介した後, それらの結果を拡張する上で生じる問題点について述べる. §4 では, 著者が得た結果とその証明の概略を紹介する.

---

[1]慶應義塾大学理工学研究科後期博士課程 2 年 (e-mail: hirakawa@keio.jp)

[2]Fermat 曲線 $F_n : x^n + y^n = 1$ $(n \geq 3)$ 上の有理点は $x = 0$ または $y = 0$ を満たすものに限るであろう, という予想 (Fermat の最終 "定理"とも呼ばれる). その名の通り P. Fermat により "定式化"され, L. Euler をはじめ多くの数学者により証明が試みられ, 最終的には A.Wiles により証明された.

[3]有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体の元を係数とする代数方程式の零点集合として表される図形. 尚, 本稿では, 適当な埋め込みを固定して代数体を複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体と見なす.

[4]楕円曲線 $E : y^2 = x^3 + ax + b$ 上に有理点が無数に存在するならば $L(E, 1) = 0$ であり, また $L(E, 1) = 0$ となるのはそのときに限るであろう, という予想. (正確には, 楕円曲線とは上の E に単位元 (無限遠点) を添加した群多様体であり, 精密な形の BSD 予想は, $L(E, s)$ を $s = 1$ の周りで Taylor 展開したときの先頭項を $E(\mathbb{Q})$ の群構造等を用いて明示的に記述できることを主張している.)

[5]任意の代数多様体の L 関数は全複素平面上定義された有理型関数に解析接続可能であり, 然るべき関数等式を満たすであろう, という予想.

[6]$\mathbb{Q}$ 上の任意の楕円曲線 E に対して, ある保型形式 (より正確には, 正規化された Hecke 固有新尖点形式)f が存在して, $L(f, s) = L(E, s)$ が成り立つという予想. 保型形式の L 関数に対しては Hasse-Weil 予想に対応する定理が既に証明されているため, この予想から $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線に対する Hasse-Weil 予想が直ちに従う. A. Wiles と R. Taylor により semi-stable な楕円曲線に対して証明され, C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor により一般の楕円曲線に対して証明された.

2. Preliminaries and motivation

まず, 本稿の中心的な対象である (狭義の)Calabi-Yau 多様体とは, 以下のような代数多様体である.

Definition 2.1. 体 F[7]上の d 次元の滑らかな射影代数多様体 X が d 次元 *Calabi-Yau* 多様体であるとは, 以下の *2* つが成り立つことである.
(i) $H^0(X, \Omega_X^p) = 0$ $(1 \leq \forall p \leq d-1)$, *i.e.,* $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ $(1 \leq \forall q \leq d-1)$[8],
(ii) $\Omega_X^d \simeq \mathcal{O}_X$, *i.e.,* $K_X \equiv 0$ *modulo linear equivalence.*[9]

Example 2.2. *1* 次元 *Calabi-Yau* 多様体は, 種数 *1* の滑らかな代数曲線に他ならない. 実際, $d = 1$ のとき, (i) は空であり, (ii) は代数曲線 X の種数が *1* であることと同値である.[10] 特に, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の *1* 次元 *Calabi-Yau* 多様体は, 複素トーラスに他ならない.[11]

次に, 本稿で扱う保型形式 (正規化された Hecke 固有尖点形式) とは, 以下のような複素上半平面 $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 上の正則関数である.[12]

Definition 2.3. $\mathcal{H}$ 上の正則関数 f が重さ $k \in \mathbb{Z}$, レベル $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ の正規化された *Hecke* 固有尖点形式であるとは, 以下が成り立つことである.
(i) (保型性) ある群準同型写像 $\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ が存在して, 任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, 及び $z \in \mathcal{H}$ に対して, $f\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon(d)(cz+d)^{-k} f(z)$ が成り立つ.[13]
(ii) (緩増大性) 任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して $\displaystyle\lim_{z \to i\infty} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = 0$ が成り立つ.
(iii) (正規性) $\displaystyle\lim_{z \to i\infty} e^{-2\pi i z} f(z) = 1$ が成り立つ.
(iv) (固有性) N と素な $n \in \mathbb{Z}$ に対して, f は *Hecke* 作用素 T_n の固有関数である.

f を Hecke 固有尖点形式とする. 任意の N に対して $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ であるから, f は Fourier 展開 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ を持つ. さらに, (ii), (iii) から, $f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ であり, 各 Fourier 係数 a_n は (iv) における Hecke 作用素の固有値であることも分かる. このとき, f の L 関数は $L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ $(Re(s) \gg 0)$ で定義される.

以上の準備の下で, 本稿で紹介する諸研究の最も大きな動機である B. Mazur と D. van Straten による問題は, 以下のように述べられる.

Problem 2.4 ([7] §7)**.** $f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ を重さ $k = d + 1 \geq 2$ で $a_n \in \mathbb{Q}$ となる *Hekce* 固有新尖点形式 (新形式) とする. このとき, $\mathbb{Q}$ 上のある d 次元 *Calabi-Yau* 多様体 X の L 関数 $L(X/\mathbb{Q}, s)$ の因子[14]に f の L 関数 $L(f_k, s)$ が現れるか*?*

---

[7]本稿で扱う基礎体は $\mathbb{C}$ の部分体であり, 特に標数は 0 である.

[8]この同値性は Hodge 理論の帰結である.

[9]ここで, K_X は X 上の標準因子 (類) を表す. また, この同値性は直線束, あるいは可逆層の同型類と因子の線形同値類との対応による.

[10]種数 g の滑らかな代数曲線 X に対して $deg(K_X) = 2g - 2$ が分かる (例えば, Riemann-Roch の定理を用いればよい) ので, (ii) から $g = 1$ が従う. 一方, (有理点を持つ) 種数 1 の代数曲線上には群構造が入り, その曲線上には至る所 0 でない正則微分形式 (不変微分形式) が定数倍を除いて一意に存在するので, (ii) が成り立つ.

[11]Riemann 面の一意化定理により, 複素トーラスは至る所曲率 0 の Riemann 計量を許容する. (ii) を満たす複素多様体に対するこの事実の一般化が, S.-T. Yau により証明された Calabi 予想であり, (広義の)Calabi-Yau 多様体の名前の由来になっているようであるが, ここでは詳しく述べない.

[12]詳細, 特に (iv) 及び後に出てくる Hecke 固有 "新" 尖点形式の定義は, [11], [4] を参照.

[13]ここで, $\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \mod N \right\}$ であり, ϵ は $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上に 0-延長している.

[14]代数多様体の L 関数については [1] を参照. また, ここで言う因子とは, 正確には $\mathbb{Q}$ 上の純モチーフの分解から生じる L 関数の因子を指す.

3. Previous results

さて, 前節で述べた Mazur と van Straten による問題 (Problem 2.4) に対する先行結果を述べる. まず, 重さ 2 の保型形式, すなわち 1 次元 Calabi-Yau 多様体に対しては, 志村五郎による先駆的な研究 [12] 等があり, Problem 2.4 は肯定的に解かれている. そこで, 重さ 3 以上の保型形式に関する結果を述べるために, 幾つか用語を導入する.

Definition 3.1. *ある複素数 $z \in \mathbb{C}$ が代数的整数であるとは, z を根とする最高次係数が 1 の $\mathbb{Z}$-係数多項式が存在することである. また, 代数体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ とは, K に属する代数的整数全体のなす環である. さらに, 各代数体 K に対して, 有限 Abel 群 $Cl(K) = \{K$ の 0 でない分数イデアル $\}/\{K$ の 0 でない単元生成イデアル $\}$ の位数を K の類数という.*[15]

Theorem 3.2 ([2] §2)**.** *$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ ($D \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$: 非平方数) を類数 1 の虚 2 次体, E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線で $End_K(E) \simeq \mathcal{O}_K$ を満たすものとする. このとき, 各 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, (E から代数幾何的な手続きで構成される)$\mathbb{Q}$ 上のある d 次元 Calabi-Yau 多様体 X が存在して, $L(X/\mathbb{Q}, s)$ の因子に $L(f_{d+1}, s)$ が現れる. ここで, $f_{d+1}(z) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} \psi_{E^n}(\mathfrak{a})^n e^{2\pi i z N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})}$ は d 次元 CM Abel 多様体 E^d*[16]*に付随する K の Hecke 指標 ψ_{E^n} から定まる重さ $k = d + 1$ の新形式*[17]*である.*

その後, [2] による Calabi-Yau 多様体の構成方法と Weil 係数制限関手 $R_{F/F'}$[18]とを組み合わせることで, S. Cynk と M. Schütt は $\mathbb{Q}$ 上の 3 次元 Calabi-Yau 多様体で, [2] の方法だけでは得られないものを構成した.

Theorem 3.3 ([3] Proposition 8)**.** *K を類数 3 の虚 2 次体, E を $\mathbb{Q}(j_E)$ 上の $\mathbb{Q}$-楕円曲線*[19]*であって, $End_{K(j_E)}(E) \simeq \mathcal{O}_K$ を満たし, かつ $K/\mathbb{Q}$ の判別式を割らない素点で良い還元を持つものとする. このとき, (E から代数幾何的な手続きで構成される)$\mathbb{Q}$ 上のある 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X が存在して, $L(X/\mathbb{Q}, s)$ の因子に $L(f_4, s)$ が現れる. ここで, $f_4(z)$ は K に CM を持つ*[20]*重さ $4 = 3 + 1$ の新形式である.*

ここで, S. Cynk と M. Schütt は重さ 3, すなわち 2 次元 Calabi-Yau 多様体に関しても同様の結果を得ていることに注意しておく. ただし, 重さ 3 の場合には, より強力な結果が N. Elkies と M. Scütt により得られている.

Theorem 3.4 ([5] Theorem 1 (§3 も参照))**.** *2 次の奇な Dirichlet 指標に付随する L 関数全てに対して, 一般化された Riemann 予想が正しいと仮定する. このとき, $k = 3$ (i.e., $d = 2$) に対する Problem 2.4 は肯定的である.*

以下では, [2] 及び [3] による Calabi-Yau 多様体の構成方法と, それを拡張する上で生じる問題点について述べる.

---

[15]各代数体 K に対して, 一般にはその整数環 $\mathcal{O}_K$ は素元分解の一意性を満たさない代わりに, 素イデアル分解の一意性を満たすことが知られている. $Cl(K)$ は, K のイデアルが K の単元生成イデアルに比べてどの程度多く存在するか, すなわち $\mathcal{O}_K$ での素イデアル分解が $\mathbb{Z}$ での素元分解に比べてどの程度複雑かを計る不変量である. 一方, 各代数体 K に対して, その Hilbert 類体と呼ばれる K 上の有限次 Abel 拡大体 H_K と "自然" な同型 $Gal(H_K/K) \simeq Cl(K)$ が存在して, K の任意のイデアルを H_K まで係数拡大すると単元生成イデアルになる, などの性質を満たすことが知られている. (類体論)

[16]($\mathbb{C}$ 上の)Abel 多様体とは, 射影的な複素トーラスのことである. また, d 次元 CM Abel 多様体とは, 射影的な d 次元複素トーラス A であって, $\mathbb{Q}$ 上 $2d$ 次の代数体 T の (非自明な) 作用を許容する (従って, その基本群 $\pi_1(A) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2d}$ の係数拡大 $\pi_1(A) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}^{\oplus 2d}$ は T-加群として T 自身と同型になる) ものである.

[17]詳細は [10] を参照.

[18]体の有限次分離拡大 F/F' に対して定まる, F 上の (射影) 代数多様体の圏から F' 上の (射影) 代数多様体の圏への関手であって, 然るべき普遍性を満たすもの. F/F' が Galois 拡大のとき, $R_{F/F'}(X) \times Spec(F) \simeq \Pi_{\sigma \in Gal(F/F')} X^\sigma$ が成り立つ. 詳細は [13] を参照.

[19]代数体 F 上の楕円曲線 E が $\mathbb{Q}$-楕円曲線であるとは, $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ に関して, E とその全ての Galois 共役 E^σ ($\sigma \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$) との間に, $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の定数射でない射が存在することである. 特に, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線は $\mathbb{Q}$-楕円曲線である. 詳細は [6] を参照.

[20]詳細は [10] を参照.

まず, [2] による構成方法を述べるが, [3] による構成方法, 及び §4 で紹介する著者自身による構成方法との比較がしやすいよう, [2] と若干記述を変える (得られる Calabi-Yau 多様体は同型である). S. Cynk と K. Hulek は, 楕円曲線 E とその群構造に関する逆元を対応させる射 -1_E に対して, 直積 $A_d = E^d$[21]への群 $G = \{((-1_E)^{a_i}) \in \langle -1_E \rangle^d \mid \sum_{i=1}^d a_i \equiv 0 \bmod 2\} \subset Aut(A_d)$ の作用を考察し, 商多様体 A_d/G の特異点解消として d 次元 Calabi-Yau 多様体 X_d を構成した. 特に, Theorem 3.3 のように, E として $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線を取れば, $\mathbb{Q}$ 上の d 次元 Calabi-Yau 多様体 X_d を得る. この構成からも明らかなように, X_d のコホモロジー群に関する計算, 特に L 関数の計算は, 本質的には Abel 多様体 A_d のそれに帰着される.

Construction by [2] (for all d).

$$\begin{tikzcd}
E = E^{\sigma_2} \arrow[rd, squiggly] & \cdots \arrow[d, squiggly] & E^{\sigma_{d-1}} = E^{\sigma_d} \arrow[ld, squiggly, "Gal(K(j_E)/K)=\{\sigma_1=id,\sigma_2,\ldots,\sigma_{d-1},\sigma_d\}=\{id\}"] & \\
& A_n = E^d \arrow[rd, "G\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{d-1}"'] & & X_d : \mathbb{Q} \text{ 上の (特異点のない)} d \text{ 次元 Calabi-Yau 多様体} \arrow[ld, "\mathbb{Q} \text{ 上の “良い”特異点解消が存在する.}"] \\
& & \overline{X_d} = A_d/G : \text{特異点を持つ } d \text{ 次元代数多様体} &
\end{tikzcd}$$

次に, [3] による 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X_3 の構成方法を述べる. S. Cynk と M. Schütt は, d 次代数体 $\mathbb{Q}(j_E)$ 上の楕円曲線に Weil 係数制限関手 $R_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}$ を施すことで得られる d 次元 Abel 多様体 $A_d = R_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}(E)$ が, $\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}$ の Galois 閉包 $K(j_E)/\mathbb{Q}$[22]上では $A_d \times Spec(K(j_E)) \simeq \Pi_{\sigma \in Gal(K(j_E)/K)} E^\sigma$ と分解することを用いて, [2] と同様の方法で, 商多様体 A_d/G の特異点解消として d 次元 Calabi-Yau 多様体 X_d を構成した. ただし, この場合, X_d は a priori には $K(j_E)$ 上の代数多様体であるため, Problem 2.4 への応用上, その定義体が $\mathbb{Q}$ まで降下 (descent) することを示さなければならない. S. Cynk と M. Schütt は, $d = 3$ の場合には, A_3/G の具体的な “良い”特異点解消を構成し, X_3 の定義体が $\mathbb{Q}$ まで降下することを示したが, 同様の方法は $d = 4$ の場合には上手くいかないことを注意している (cf. [3] §4). また, [2] と同様に, X_3 のコホモロジー群に関する計算, 特に L 関数の計算は, 本質的には Abel 多様体 $A_3 = R_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}(E)$ のそれに帰着されることを注意しておく. この際, E が $\mathbb{Q}$-楕円曲線であることが本質的である. (cf. §4)

Construction by [3] for $d = 3$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rd, squiggly] & E^{\sigma_2} \arrow[d, squiggly] & E^{\sigma_3} \arrow[ld, squiggly, "Gal(K(j_E)/K)=\{\sigma_1=id,\sigma_2,\sigma_3=\sigma_2^2\}"] & \\
& A_3 = R_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}(E) \arrow[rd, "G\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2"'] & & X_3 : \mathbb{Q} \text{ 上の (特異点のない)3 次元 Calabi-Yau 多様体} \arrow[ld, "\mathbb{Q} \text{ 上の “良い”特異点解消が存在する.}"] \\
& & \overline{X_3} = A_3/G : \text{特異点を持つ 3 次元代数多様体} &
\end{tikzcd}$$

---

[21]代数多様体を表す記号の右下添え字は, その代数多様体の次元を表す.

[22](Theorem 3.3 の設定の下では)$K(j_E)$ は K の Hilbert 類体であることが知られている. (虚数乗法論)

Construction by [3] for $d = 4$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
E \arrow[drr, squiggly] & E^{\sigma_2} \arrow[dr, squiggly] & & E^{\sigma_3} \arrow[dl, squiggly] & E^{\sigma_4} \arrow[dll, squiggly, "Gal(K(j_E)/K)=\{\sigma_1=id,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}"] \\
 & & A_4 = R_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}(E) \arrow[dr, "G\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3"'] & & X_4 \arrow[dl, dashed, "\mathbb{Q}\text{ 上の “良い”特異点解消が存在しない.}"] \\
 & & & \overline{X_4} = A_4/G : \text{特異点を持つ 4 次元代数多様体} &
\end{tikzcd}$$

以上のことから, [2] と Weil 係数制限関手とを組み合わせて 4 次元以上の Calabi-Yau 多様体を構成する場合, 途中で生じる特異点を上手くコントロールすることで, その特異点解消の定義体を降下する必要があることが分かる. 次節では, この問題点に対する著者のアイデアを紹介し, 主結果とその証明の概略を述べる.

4. Main result

以下が本稿の主結果である.

Theorem 4.1. *K を類数 2^n の虚 2 次体とし, E を $\mathbb{Q}(j_E)$ 上の $\mathbb{Q}$-楕円曲線であって $End_{K(j_E)}(E) \simeq \mathcal{O}_K$ を満たすものとする. さらに, E の $\mathbb{Q}(j_E)$ 上の有理点全体がなす Abel 群 $E(\mathbb{Q}(j_E))$ が単位元でない 2-捻れ点を持つと仮定する. このとき, (E から代数幾何的な手続きで構成される)$\mathbb{Q}$ 上のある 2^n 次元 Calabi-Yau 多様体 X が存在して, $L(X/\mathbb{Q}, s)$ の因子に $L(f_{2^n+1}, s)$ が現れる. ここで, $f_{2^n+1}(z)$ は K に CM を持つ重さ $2^n + 1$ の新形式である.*

$E(\mathbb{Q}(j_E))$ に関する仮定は付いているものの, Theorem 3.3 と同様の設定の下で, 4 次元を含め, 保型形式の L 関数を因子に持つ 2 冪次元 Calabi-Yau 多様体を無数に構成できたことを注意しておく.

Theorem 4.1 における Calabi-Yau 多様体 $X = X_{2^i}$ の構成方法を述べる前に, 1 つ準備をしておく. 今, K の類数が 2^n であることから, $K(j_E)/K$ の部分体の列 $\{K_i\}_{0\leq i\leq n}$ で $[K_{i-1} : K_i] = 2$ となるものが存在するので, 任意に選び固定する. さらに, 固定した $\{K_i\}_{0\leq i\leq n}$ に対して, $\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}$ の部分体の列 $\{F_i\}_{0\leq i\leq n}$ を $F_i = \mathbb{Q}(j_E) \cap K_i$ で定める. また, $Gal(K_{i-1}/K_i)$ の非自明な元を σ_i とする. (以下の図を参照)

まず, $F_0 = \mathbb{Q}(j_E)$ 上の ($\mathbb{Q}$-) 楕円曲線から F_1 上の 2 次元 Calabi-Yau 多様体を構成する. これは, [2] をそのまま適用すればよい.[23] すなわち, $A_2 = R_{F_0/F_1}(E)$ に対して, $A_2/\langle -1_{A_2}\rangle$ の (極小) 特異点解消を X_2 とすれば, X_2 は F_1 上の 2 次元 Calabi-Yau 多様体である. この X_2 に対して, $E(F_0)$ に関する仮定から, 以下が成り立つ.

Proposition 4.2. *$P' = R_{F_0/F_1}(P) \in A_2(F_1)[2]$ に対して, $t_{P'} \in Aut_{F_1}(A_2)$ を P' による平行移動 (translation) とする. このとき, $(-1_E, 1_{E^{\sigma_1}}) \circ t_{P'} \in Aut_{K_0}(A) = Aut_{K_0}(E \times E^{\sigma_1})$ が誘導する X_2 上の自己同型写像 ϵ[24] は F_1 上定義され, 固定点を持たない. 特に, $X_4 = R_{F_1/F_2}(X_2)/R_{F_1/F_2}(\epsilon)$ は F_2 上の 4 次元 Calabi-Yau 多様体である.*

以下同様にして, F_i 上の 2^i 次元 Calabi-Yau 多様体 X_{2^i} を帰納的に構成することができる.

---

[23] 実際, 以下で出てくる X_2 は, A_2 に付随する Kummer 曲面と呼ばれる最も古典的な 2 次元 Calabi-Yau 多様体であり, Kummer 曲面の構成方法を (狭義の) 高次元 Calabi-Yau 多様体や既約シンプレクティック多様体 (超 Kähler 多様体) に拡張に関する研究は, [2] 以外にも複数存在する.

[24] この自己同型写像 ϵ は (P' に付随する)Lieberman 対合と呼ばれている.

$$
\begin{tikzcd}
 & K_0 = K(j_E) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash, "\langle\sigma_1\rangle"] & & & & \\
F_0 = \mathbb{Q}(j_E) \arrow[dr, dash, swap, "\langle\sigma_1\rangle"] & & K_1 \arrow[dl, dash] \arrow[ddrr, dash, dotted, "\langle\sigma_2\rangle \quad \langle\sigma_{n-1}\rangle"] & & & \\
 & F_{n-2} \arrow[ddrr, dash, dotted, swap, "\langle\sigma_{n-2}\rangle \quad \langle\sigma_{n-1}\rangle"] & & & & \\
 & & & & K_{n-1} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash, "\langle\sigma_n\rangle"] & \\
 & & & F_{n-1} \arrow[dr, dash, swap, "\langle\sigma_n\rangle"] & & K_n = K \arrow[dl, dash] \\
 & & & & F_n = \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X_1 = E \arrow[dr, rightsquigarrow] & & E^{\sigma_1} \arrow[dl, rightsquigarrow] & & & & & \\
 & A_2 = R_{F_0/F_1}(E) \arrow[dr, swap, "\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}"] & & X_2 \ \circlearrowright \langle\epsilon\rangle \arrow[dl] \arrow[dr, rightsquigarrow] & & X_2^{\sigma_2} \arrow[dl, rightsquigarrow] & & \\
 & & \overline{X_2} = A_2/\langle -1_{A_2}\rangle & & R_{F_1/F_2}(X_2) \arrow[dr, swap, "\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}"] & & \overline{\langle\epsilon\times id\rangle} = \overline{\langle id\times\epsilon^{\sigma_2}\rangle} & \\
 & & & & & X_4 = R_{F_1/F_2}(X_2)/R_{F_1/F_2}(\epsilon) \ \circlearrowright \arrow[dr, rightsquigarrow] & & X_4^{\sigma_3} \arrow[dl, rightsquigarrow] \\
 & & & & & & R_{F_2/F_3}(X_4) \arrow[dr, swap, "\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}"] & \\
 & & & & & & & X_8 \\
 & & & & & & & \vdots
\end{tikzcd}
$$

上のようにして得られた $\mathbb{Q}$ 上の Calabi-Yau 多様体 $X = X_{2^i}$ の L 関数の因子に保型形式が現れることを示すためには, そのモチーフ $h(X_{2^i})$ から適切な階数 2 の純モチーフを切り出し, 2 次元 Galois 表現の一般論を適用する.[25] 特に, 前者には E が $End_{K(j_E)}(E) \simeq \mathcal{O}_K$ を満たす $\mathbb{Q}$-楕円曲線であることを用いる.[26]

まず, 階数 2 の純モチーフを切り出す方法について述べる. これは, X_{2^n} の構成方法と同様に帰納的に行う. 1 次元の場合は CM 楕円曲線の一般的性質としてよく知られているので, 以下では 2 次元以上の場合について述べる. [8] による代数曲面の一般的性質から, 2 次元 Calabi-Yau 多様体 X_2 のモチーフ $h(X_2)$ は Künneth 分解 $h(X_2) = \bigoplus_{i=0}^4 h_i(X_2)$ を持ち, さらに 2 次のモチーフ $h_2(X_2)$ は代数的サイクル (Néron-Severi 群) に対応するモチーフ $h_2^{alg}(X_2)$ とその直既約成分に対応するモチーフ $t_2(X_2)$ に分解する. 今, $t_2(A_2)$ が階数 2 の純モチーフである[27]ことから, $t_2(X_2)$ も階数 2 の純モチーフであることが分かる. さらに, 4 次元 Calabi-Yau 多様体 X_4 の 4 次モチーフ $h_4(X_4)$ の直和因子として, 階数 4 の純モチーフ $t_2(X_2) \otimes t_2(X_2^{\sigma_2})$ を得るが, これは代数的サイクルから生じる階数 2 のモチーフを含むことが分かる[28]ので, [8] と同様の方法で, 階数 2 の代数的サイクルから生じる部分モチーフとその直既約成分に対応する階数 2 の純モチーフ $t_4(X_4)$ に分解することができる. 以下, 帰納的に, $h(X_{2^n})$ の部分モチーフとして階数 2 の純モチーフ $t_{2^n}(X_{2^n})$ を得る.

以上のように構成された $\mathbb{Q}$ 上の純モチーフ $t_{2^n}(X_{2^n})$ に対して以下の定理を適用することで, Theorem 4.1 を得る.

Theorem 4.3 (a part of [9]). *M を $\mathbb{Q}$ 上の階数 2 の純モチーフで Hodge 数が $h^{p,0} = h^{0,p} = 1$ $(p \geq 0)$ となるものとする. M の Betti 実現上のカップ積 $\cup : H_B(M) \times H_B(M) \to \mathbb{Q}$ が, 非退化かつ対称的である[29]と仮定し, D を $\cup$ の判別式[30]とする. このとき, 各素数 l に対して定まる M の l 進実現 ρ_l に対して, 虚 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ に値を持つ ∞-型 $z \mapsto z^p$ のある指標 $\psi : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ が存在して, $\rho_l \otimes K \simeq \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\psi \circ rec^{-1})$ が成り立つ.*[31]

References

[1] M. Chida, Galois 表現の基礎 II, 第 17 回整数論サマースクール報告集.

[2] S. Cynk and K. Hulek, Higher-dimensional modular Calabi-Yau manifolds, Canad. Math. Bull., **50** (4), 2007, 486–503.

[3] S. Cynk and M. Schütt, Generalized Kummer constractions and Weil restrictions, J. Number Theory, **129**, 2009, 1965–1975.

[4] F. Diamond and J. Shurman, A first course in modular forms, GTM 228, Springer-Verlag, New York, 2005.

[5] N. D. Elkies and M. Schütt, Modular forms and K3 surfaces, Adv. Math., **240**, 2013, 106–131.

[6] B. H. Gross, Arithmetic of elliptic curves with complex multiplication with an appendix by B. Mazur, LNM, vol. **776**, Springer, 1980.

[7] K. Hulek, R. Kloosterman and M. Schütt, Modularity of Calabi-Yau varieties. in Global aspects of complex geometry, Springer, Berlin, 2006, 271–309.

[25] モチーフの一般論については, [8] 及びその reference を参照.

[26] $E(\mathbb{Q}(j_E))$[2] に関する仮定とは異なり, E にこれら 2 つの性質を課すことは, E に Weil 制限関手を施して得られる Abel 多様体の商を経由して高次元 Calabi-Yau 多様体を構成する上では, 本質的である.

[27] これは, E が $End_{K(j_E)}(E) \simeq \mathcal{O}_K$ を満たす $\mathbb{Q}$-楕円曲線であることの帰結である. 一方だけでは, 高々階数 3, または 4 の純モチーフまでしか切り出せない.

[28] これも E が $\mathbb{Q}$-楕円曲線であることの帰結である. このように, building block である E が $\mathbb{Q}$-楕円曲線であること, すなわち "Galois 共役との間に非自明な代数対応を持つ" ことが, 我々の構成した Calabi-Yau 多様体 X_{2^n} のモチーフ $h_{2^n}(X^{2^n})$ が十分細かく分解することを保証している.

[29] 例えば, 滑らかな偶数次元射影代数多様体の中間次コホモロジー群上のカップ積は, この条件を満たす.

[30] $\mathbb{Q}$ 係数 Betti 実現に対しては, この判別式は $\mathbb{Q}^{\times 2}$ の曖昧さを除いて一意に定まる. いずれにせよ, 主張に現れる虚 2 次体 K は $\mathbb{Q}$ 係数 Betti 実現から一意に定まることに注意.

[31] $rec : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times} \to Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})^{ab}$ は (適切に正規化された)Artin 相互写像である.

[8] B. Kahn, J. Murre and C. Pedrini, On the transcendental part of the motive of a surface, in Algebraic cycles and motives. vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note **344**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 143–202.

[9] R. Livné, Motivic orthogonal two-dimensional representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Israel J. Math., **92**, 1995, 149–156.

[10] K. A. Ribet, Galois representations attached to eigenforms with nebentypus, Modular Functions of One Variable V, LNM, vol. **601**, 1977, 17–52.

[11] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Reprint of the 1971 original, Publications of the Mathematical Society of Japan, 11. Kan$\hat{o}$ Memorial Lectures, 1, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.

[12] G. Shimura, On the factors of the jacobian variety of a modular function field, J. Math. Soc. Japan **25**, 1973, 523–544.

[13] A. Weil, Adeles and algebraic groups, with appendices by M. Demazure and Takashi Ono, Progr. Math., **23**. Birkhäuser, Boston, Mass., 1982.