新しい格子不変量

早坂亮太 (Ryota Hayasaka) *
山形大学

概 要

正方格子 $\mathbb{Z}^2$ において、任意の正整数 n に対して丁度 n 個の格子点を通るような円が存在する (cf. [1])。今回、n=3,4,5,...,10 に対して丁度 n 個の格子点を通る円の最小半径を求めるプログラムを作成した。さらに六角格子においても同様な考察を行った。発表では、それぞれの格子が持つこの不変量 (最小円の半径の 2 乗) の値やそれらから得られた定理、今後の課題などについて紹介する予定である。

1 導入

以下では、$\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ を 2 次元格子とする。

定義 1.1 正整数 n に対し、Λ 上で丁度 n 個の格子点を通るような円が存在するとき、Λ を universally concyclic という。

定義 1.2 正整数 n に対し、$\mathrm{uc}(\Lambda, n)$ を Λ 上で n 個の格子点を通るような円の中で半径が最小である円の半径の 2 乗の値とする。

定理 1.1 (cf. [1]) 素数 p が $p \equiv 1 \pmod 4$, $p^k \equiv 1 \pmod 8$ を満たすとき、円 $(4x-1)^2 + (4y)^2 = p^k$ の周上には丁度 $k+1$ 個の格子点が存在する。

系 1.1 (cf. [1]) 任意の正整数 n に対して、丁度 n 個の格子点を通る平面上の円が存在する。つまり $\mathbb{Z}^2$ は universally concyclic である。

問題 1.1 (cf. [1]) $n = 3, 4, 5, ..., 10$ に対して、ちょうど n 個の格子点を通る円の最小半径の 2 乗を決定せよ。

今回、問題 1.1 を受けて正整数 n に対して、n 個の格子点を通るような円の最小半径の 2 乗を決定するためのプログラムを作成した。

*email: e128021@st.yamagata-u.ac.jp

2 主結果

以下の表がそれらの値を示したものである。

	uc$(\Lambda,3)$	uc$(\Lambda,4)$	uc$(\Lambda,5)$	uc$(\Lambda,6)$	uc$(\Lambda,7)$	uc$(\Lambda,8)$
$\mathbb{Z}^2$	$5^2/2*3^2$	$1/2$	$5^4/2*3^2$	$5^2/2^2$	$5^4*13*17/2*11^2$	$5/2$

uc$(\Lambda,9)$	uc$(\Lambda,10)$	$\cdots$	uc$(\Lambda,16)$	$\cdots$	uc$(\Lambda,32)$	$\cdots$
$5^2*13^2/2*3^2$	$5^4/2^2$	$\cdots$	$5*13/2$	$\cdots$	$5*13*17/2$	$\cdots$

予想 2.1 ℓ を非負の整数とする。この時、$\mathbb{Z}^2$ 上で $2^{\ell+2}$ 個の格子点を通るような円の一般化が存在するのではないか。

定理 2.1 素数 $p \equiv 1 \pmod 4$ に対し、$p = a^2 + b^2$ を満たすような整数 a, b が存在。

定理 2.1 は、フェルマーの 2 平方和定理と呼ばれる整数論における有名な定理である。

ここで、p_i を 4 を法として 1 と合同である i 番目に小さい素数とする（ただし、$p_0 := 1$）.

補題 2.1 $\omega\overline{\omega} = 2\prod_{k=0}^{\ell} p_k$ を満たすような $\omega \in \mathbb{Z}[i]$ の個数は $2^{\ell+2}$ 個存在する。

証明 定理 2.1 フェルマーの 2 平方和定理より、任意の p_j に対して $p_j = a_j^2 + b_j^2$ を満たすような a_j,$b_j \in \mathbb{Z}$ が存在する。よって、

$$p_j = (a_j + ib_j)(a_j - ib_j).$$

ここで、$a_j + ib_j$ と $a_j - ib_j$ は $\mathbb{Z}[i]$ 上で既約元であることに注意。$2 = 1^2 + 1^2$ より $2 = (1+i)(1-i)$. 従って、

$$\omega\overline{\omega} = 2\prod_{k=0}^{\ell} p_k = (1+i)(1-i)\prod_{k=0}^{\ell}(a_k + ib_k)(a_k - ib_k).$$

次に ω の起こりうる場合の数を考える。ω は以下のように表すことができる：

$$\omega = u(1+i)^{\epsilon_0}(1-i)^{1-\epsilon_0}(a_1+ib_1)^{\epsilon_1}(a_1-ib_1)^{1-\epsilon_1}...(a_\ell+ib_\ell)^{\epsilon_\ell}(a_\ell-ib_\ell)^{1-\epsilon_\ell}.$$

$$(u = \pm 1, \pm i,\ \epsilon_n = 0, 1\ (n = 0, 1, ..., \ell)\ )$$

$(1+i)$ と $(1-i)$ は実部と虚部の絶対値の値が同じなので、ω の起こりうる場合の数に $(1+i)$ と $(1-i)$ は依存していないことに注意。従って、ω の起こりうる場合の数 $\mathbb{Z}^2$ 上で $\frac{4*2^{\ell+1}}{2} = 2^{\ell+2}$ 個存在する。

□

定理 2.2 円 $(2x-1)^2+(2y-1)^2 = 2\prod_{k=0}^{\ell} p_k$ の周上には、丁度 $2^{\ell+2}$ の格子点がある。

証明 補題 2.1 より、$X^2+Y^2 = 2\prod_{k=0}^{\ell} p_k$ を満たす $(X,Y) \in \mathbb{Z}^2$ は $2^{\ell+2}$ 個存在することが分かる。

$X^2, Y^2 \equiv 0,1 \pmod 4$ かつ $2\prod_{k=0}^{\ell} p_k \equiv 2 \pmod 4$ であるので、$X^2+Y^2 = \prod_{k=0}^{\ell} p_k$ ならば、$X^2 \equiv 1$ かつ $Y^2 \equiv 1 \pmod 4$ である。さらにこれは、$X \equiv 1$ かつ $Y \equiv 1 \pmod 2$ であることを意味している。従って, $(2x-1)^2+(2y-1)^2 = 2\prod_{k=0}^{l} p_k$ を満たす $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ の数は、

$$\begin{aligned}
&\cdot\, X^2+Y^2 = 2\prod_{k=0}^{l} p_k,\\
&\cdot\, 2x-1 \equiv -1 \equiv 1 (\equiv X) \pmod 2,\\
&\cdot\, 2y-1 \equiv -1 \equiv 1 (\equiv Y) \pmod 2
\end{aligned}$$

を満たす $(X,Y) \in \mathbb{Z}^2$ の数と等しい。従って、$(2x-1)^2+(2y-1)^2 = 2\prod_{k=0}^{\ell} p_k$ を満たす格子点 $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ の数は丁度 $2^{\ell+2}$ 個存在する。

□

系 2.1 ℓ を非負の整数とする。この時、$\mathbb{Z}^2$ 上で丁度 $2^{\ell+2}$ 個の格子点を通るような円は、$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\prod_{k=0}^{\ell} p_k$ として表すことができる。

他にも、六角格子 A_2 に対し同様な考察を行った。

定義 2.1 $(1,0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in \mathbb{R}^2$ で生成される格子 Λ を六角格子と呼ぶ。A_2 として表す。

命題 2.1 (cf. [2]) 六角格子 A_2 は universally concyclic である。

六角格子 A_2 に対しても、問題 1.1 と同様な問題を考えた。以下の表がそれらの値を示したものである。

	$\mathrm{uc}(\Lambda,3)$	$\mathrm{uc}(\Lambda,4)$	$\mathrm{uc}(\Lambda,5)$	$\mathrm{uc}(\Lambda,6)$	$\mathrm{uc}(\Lambda,7)$
A_2	$1/3$	$7/2^2$	$7^2*13^2/11^2$	1	$7^2*13*19*43/3*11^2$

$\mathrm{uc}(\Lambda,8)$	$\mathrm{uc}(\Lambda,9)$	$\mathrm{uc}(\Lambda,10)$	$\cdots$	$\mathrm{uc}(\Lambda,12)$	$\cdots$	$\mathrm{uc}(\Lambda,24)$	$\cdots$
$7*13/2^2$	$7^2/3$	$7^4/2^2$	$\cdots$	7	$\cdots$	$7*13$	$\cdots$

予想 2.2 m を非負の整数とする。この時、A_2 上で $6*2^m$ 個の格子点を通るような円の一般化が存在するのではないか。

q_j を 3 を法として 1 と合同である j 番目に小さい素数とする ($q_0 := 1$)。

補題 2.2 $\tau\overline{\tau} = \prod_{k=0}^{m} q_k$ を満たすような $\tau \in \mathbb{Z}[\zeta]$ の個数は、$6*2^m$ 個存在する ($\zeta = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$)。

定理 2.3 A_2 上で円 $x^2 + y^2 = \prod_{k=0}^{m} q_k$ の周上には丁度 $6*2^m$ の格子点がある。

3 課題

課題 1 (cf. [3], [4]) ある 2 つの格子 Λ_1 と Λ_2 が同型であるならば、任意の n に対して $\mathrm{uc}(\Lambda_1, n)$ と $\mathrm{uc}(\Lambda_2, n)$ の値は全て等しくなる。よって、$\mathrm{uc}(\Lambda, n)$ は格子 Λ の不変量とみなすことができるので、その不変量を用いて格子を区別できることが分かる。さらに 2 次元平面において、$\mathbb{Z}^2$ や A_2 の他に universal concyclic な 2 次元格子が存在する。従って、それらの格子の不変量（最小円の半径の 2 乗）を計算することで各々が非同型であることを示していきたい。

課題 2 (cf. [1]) 3 次元 $\mathbb{R}^3$ の球面上で任意の正整数 n に対し、n 個の格子点を通る球が存在する。例えば、球 $(4x-1)^2 + (4y)^2 + (4z-\sqrt{2})^2 = 17^k + 2$ は、丁度 $k+1$ 個の格子点を通る。つまり、この命題に対して $z = 0$ とおくと、方程式は $(4x-1)^2 + (4y)^2 = 17^k$ となる。これは、定理 1.1 に帰着していることを意味し、$\mathbb{Z}^3$ は universally consyclic であることを示唆しているのと同時に、任意の正整数 n に対して $\mathrm{uc}(\mathbb{Z}^3, n)$ の上界を決定している。よって、2 次元平面と同様な最小問題を考えることができる。今後の課題は、3 次元空間 $\mathbb{Z}^3$ におけるプログラムを作成し、ある規則を見つけ、定理として導くことである。予想としては、$\mathbb{Z}^2$ と同様に n の値が 2 冪のとき、ある規則性が見つかるのではないかと考えている。

課題 3 (cf. [5]) 4 次元において、m を任意の非負の整数とする。このとき、ノルムが m である格子ベクトルの数が全て同じになる 2 つの格子 L_1 と L_2 がするが、この 2 つの格子 L_1 と L_2 は非同型だということが分かっている。このことを $\mathrm{uc}(L_1, n)$ と $\mathrm{uc}(L_2, n)$ を計算することで非同型であることを示したい。

参考文献

[1] 前原潤 著,「整数格子の初等幾何」,
< http : //infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/ hachi/COS/combin.jp/maebara$_0$8.pdf >,
アクセス日 2015/12/25

[2] 坂内英一 三枝崎剛 著,「On a property of 2-dimensional integral Euclidean lattice」,Journal of Number Theory 132 (2012), no.3,371-378.

[3] 坂内英一 三枝崎剛 著,「Toy models for D.H. Lehmer's conjecture II」,Journal of the Mathematical Society of Japan (Impact Factor: 0.62). 01/2009; 62(3).

[4] 三枝崎剛 早坂亮太 著,「New invariants for integral lattice」

[5] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, 「Four-dimensional lattices with the same theta series」, International Mathematics Research Notices (Impact Factor: 1.1). 01/1992, no. 4, 93–96.