Eulerの二重ゼータ値の公式について

原田 遼太郎 Ryotaro HARADA
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

$k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ であり, $k_n > 1$ である指数 $(k_1, \ldots, k_n)$ に対し, 以下に定義される実数を**多重ゼータ値 (multiple zeta value)** という.

$$\zeta(k_1, \ldots, k_n) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_n} \frac{1}{{m_1}^{k_1} \cdots {m_n}^{k_n}} \quad .$$

また, $k_n > 1$ となる指数 $(k_1, \ldots, k_n)$ を**収束指数 (admissible index)** とよぶ.

多重ゼータ値は, 整数論, 結び目理論, 数理物理学などの数学の様々な分野と関連していることが知られている. 多重ゼータ値の研究は 18 世紀の Euler による二重ゼータ値 ($n = 2$ の多重ゼータ値) の研究 ([E]) にまで遡るとされる. Euler の実際の研究内容については, (この論文 [E] がラテン語で書かれているためか) 詳しく知られていないようであるが, Euler は二重ゼータ値についての関係式を導く prima methodus, secunda methodus, tertia methodus の三手法を編み出しており, それぞれより以下の興味深い関係式を見出している;

Prima methodus:

$$\zeta(a)\zeta(b) = \zeta(a+b) + \zeta(a,b) + \zeta(b,a). \tag{1}$$

Secunda methodus:

$$\begin{aligned}
\zeta(a)\zeta(b) - \zeta(a+b) = &\sum_{i=0}^{a-1} (-1)^i \binom{b+i-1}{i} \zeta(b+i)\zeta^*(a-i) \\
&+ (-1)^a \sum_{j=0}^{b-1} \binom{a+j-1}{j} \zeta^*(a+j, b-j) \\
&+ \sum_{i=0}^{b-1} (-1)^i \binom{a+i-1}{i} \zeta(a+i)\zeta^*(b-i) \\
&+ (-1)^b \sum_{j=0}^{a-1} \binom{b+j-1}{j} \zeta^*(b+j, a-j).
\end{aligned} \tag{2}$$

Tertia methodus:

$$\zeta(a,b)=\sum_{i=0}^{a-1}(-1)^i\binom{b+i-1}{i}\left\{\zeta^*(b+i,a-i)+\zeta(a-i,b+i)+\zeta(a+b)\right\}$$
$$+(-1)^a\sum_{j=0}^{b-1}\zeta^*(a+j,b-j). \tag{3}$$

以上の関係式において, $\zeta^*(a,b)$ とは収束指数でない指数 (a,b) (すなわち $b=1$ のケース) において, $\zeta(a,b)$ に調和積を用いて正規化 ([IKZ]) を施した $\mathbb{R}[T]$ (T は変数) の元のことである.

Euler が関係式 (1) に与えた証明は正しい一方で, 関係式 (2), (3) の証明は厳密な数学の観点から完全とは言えず, 議論の余地を残している. 今回得られた結果は, (2), (3) についての Euler の証明を数学的に正当化したことである.

Theorem ([H])**.** 整数 $a,b\in\mathbb{Z}_{>1}$ に対し, 実際に関係式 (2), (3) が成り立つ.

さらに [H] ではこの二式が複シャッフル関係式から導かれることが示されている.

参考文献

[E] Leonhard Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol **20** (1776), 140–186, reprinted in Opera Omnia ser. I, vol. **15**, B. G. Teubner, Berlin (1927) 217–267.

[H] Ryotaro Harada, *On Euler's formulae among double zeta values*, in preparation.

[IKZ] Kentaro Ihara, Masanobu Kaneko, and Don Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math., **142** (2) (2006), 307–338.