ボース場と相互作用する量子系の模型の基底状態に対する縮退度の評価

船川大樹 (Daiju Funakawa)*

北海道大学博士課程 3 年

【概要】

ヒルベルト空間上の摂動の入った自己共役作用素について, 基底状態に対する縮態度を上から評価する. さらにボース場と相互作用する量子系の模型を定義し, この模型が自己共役で基底状態を持つこと, 基底状態に対する縮態度の上からの評価を与える.

1　モチベーション及び主定理

1.1　モチベーション

本研究は九州大学の廣島氏が 2005 年に行った研究 [H1] の一般化である. 場の量子論において基底状態の存在性を言及すること, 及び基底状態における縮退度を求めることは重要な研究の一つとなっている. 基底状態の存在または非存在の証明は [AH, AHH1, GLL] などで様々な手法が得られてきた. 基底状態における縮退度についてもいくつか計算方法はあるが, 一般論は数少ない. フェルミオンを考慮しない場合のハミルトニアンについて基底状態における縮態度を計算する際, 汎関数積分表示を使用し計算する方法もある. しかし, フェルミオンを考慮した場合, 現段階では汎関数積分表示を使って基底状態に対する縮態度を計算することが出来ない. この場合の一つの解決として [H1] によって　摂動項が非摂動項に対して相対有界な場合は基底状態における縮退度を上から評価する方法が得られた. そして, 本研究により相互作用項が非摂動項に対して相対有界でない場合にも, 基底状態における縮態度が上から評価できることが得られた. この研究は新井朝雄教授との共同研究である. 本講演では本研究の応用例としてボース場と相互作用する量子系の模型を定義し, 基底状態の縮態度を上からの評価について発表する.

1.2　主定理

本紙ではヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 T の定義域を $D(T)$ で表すこととする. また, T のスペクトルを $\sigma(T)$ で表し, T が下に有界な場合, T のスペクトル集合 $\sigma(T)$ の下限を T の最低エネルギーと呼び, $E_0(T)$ と書く:$E_0(T) := \inf \sigma(T)$. さらに $\ker(T - E_0(T)) \neq \{0\}$ の場合,T は基底状態を持つと言い, $\dim \ker(T - E_0(T))$ を T の基底状態に対する縮態度と呼び, $m(T)$ で表す:$m(T) := \dim \ker(T - E_0(T))$. また, $\mathcal{H}$ から $\ker(T - E_0(T))$ への正射影作用素を P_T で定義する.

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の非負な自己共役作用素 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ $n = 1, 2, \cdots$ に対して $A_0 \leq \sum_{j=1}^n A_j$ であることを, $\cap_{j=1}^n D(A_j^{1/2}) \subset D(A_0^{1/2})$ であり, 次の不等式が成り立つことと定義する:

$$\langle A_0^{1/2}\psi, A_0^{1/2}\psi\rangle \leq \sum_{j=1}^n \langle A_j^{1/2}\psi, A_j^{1/2}\psi\rangle \ \ \psi \in \cap_{j=1}^n D(A_j^{1/2}).$$

* E-mail:funakawa@math.sci.hokudai.ac.jp

H_0 を $\mathcal{H}$ 上の下に有界な自己共役作用素とし,H_{I} を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする. また, この 2 つの作用素の和

$$H := H_0 + H_{\mathrm{I}}$$

は下に有界な自己共役作用素であるとする. ここで, H の定義域は $D(H) := D(H_0) \cap D(H_{\mathrm{I}})$ と定義する.

また, 以下の 3 条件 (仮定 1〜仮定 3) を仮定する.

仮定 1　(i)H_0 と H は基底状態を持ち, $m(H_0) < \infty$ である.

(ii)$\mathcal{H}$ 上の非負自己共役作用素 L で

$$I \leq L + P_{H_0}$$

となるものが存在する.

(K, Σ, μ) を $\sigma-$ 有限な測度空間とし, ω を K 上の非負な Σ 可測関数で $0 < \omega(k) < \infty$, $\mu-$a.e.$k \in K$ を満たすものとする. また, 各 $s \in \mathbb{R}$ に対して $X := L^2(K, d\mu)$ の部分空間

$$X_s := \{f \in X \mid \int_K \omega(k)^s |f(k)|^2 d\mu(k) < \infty\}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

を定義する. また, $\mathcal{H}$ 上の稠密な閉線形作用素の族 $\{A(f) | f \in X\}$ が存在し, 各 $f \in X$ に対して $D(L^{1/2}) \subset D(A(f))$ と, 任意の $\psi \in D(L^{1/2})$ に対して

$$A(zf + wg)\psi = z^* A(f)\psi + w^* A(g)\psi, \quad f \in X, \ z, w \in \mathbb{C}$$

を満たすとする. ここで z^* は $z \in \mathbb{C}$ の複素共役を表す. さらに次の線形作用素を定義する：

$$A_0(f, t) := e^{-itH_0} A(f) e^{+itH_0}, \quad t \in \mathbb{R}, \ f \in X$$

仮定 2　(i) ある $\alpha \in (0, 1]$ と $\beta \geq 0$ について, 任意の $f \in X_{-\beta}$ に対して $A(f)$ は H_0^α に対して相対有界である.

(ii)H_0^α の芯 $\mathcal{D}$ が存在して, 任意の $f \in X_{-\beta}$ に対して $\mathcal{D}$ 上で $\text{s-lim}_{t\to\infty} A(f)e^{itH_0} = 0$ が成立する.

(iii) ある稠密な部分空間 $Y \subset X_{-\beta}$ 上の任意の $f \in Y$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ について, $(H_0, A_0(f, t))$ は $D(H)$ 上に弱交換子 $[H_0, A_0(f, t)]_{\mathrm{w}}^{D(H)}$ を持ち, $[H_0, A_0(f, t)]_{\mathrm{w}}^{D(H)}$ は $D(H)$ 上で t について強連続である.

(iv) 各 $\psi \in D(H)$ と $f \in Y$ に対して $A_0(f, t)$ は t について強微分可能であり,

$$\frac{dA_0(f, t)\psi}{dt} = -i[H_0, A_0(f, t)]_{\mathrm{w}}^{D(H)}\psi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(v) 任意の $t \in \mathbb{R}$, $f \in Y$ に対して $(H_{\mathrm{I}}, A_0(f, t))$ は $D(H)$ 上で弱交換子を持ち, 任意の $\psi \in D(H)$ に対して $[H_{\mathrm{I}}, A_0(f, t)]_{\mathrm{W}}^{D(H)}\psi$ は t について強連続である. さらに μ-a.e.$k \in K$ に対して $D(T(k)^*) \cap D(T(k)) \supset D(H)$ を満たす $\mathcal{H}$ 上の稠密な線形作用素 $T(k)$ が存在し, 以下を満たす：

(a) 任意の $\psi, \chi \in D(H)$ と $f \in Y$ に対して $\int_K |f(k)\langle\chi, T(k)\psi\rangle| d\mu(k) < \infty$ を満たし, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して以下が成立する:

$$\langle\chi, [H_{\mathrm{I}}, A_0(f, t)]_{\mathrm{W}}^{D(H)}\psi\rangle = \int_K e^{i\omega(k)} f(k)^* \langle\chi, T(k)\psi\rangle d\mu(k).$$

(b) 任意の $\phi \in P_H\mathcal{H}$ と $f \in Y$ に対して以下が成立する.

$$\int_K |f(k)|\omega^{-n}(k) \|T(k)\phi\| d\mu(k) < \infty, \quad n = 0, 1$$

(c) 稠密な部分空間 $Y_0 \subset Y$ が存在して任意の $\psi \in \mathcal{D}$, $f \in Y_0$ と $\phi \in P_H\mathcal{H}$ に対して次が成立する:

$$\int_0^\infty \left| \int_K f(k)^* \langle\psi, e^{is(H - E_0(H) + \omega(k))} T(k)\phi\rangle d\mu(k) \right| ds < \infty.$$

仮定 3　X 上の正規直交系 $\{e_n\}_n$ で $e_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$ となるものと $\varepsilon_0 \in [0, 1)$ が存在して次を満たす:

$$\sup_{\phi \in D(L^{1/2}) \cap P_H\mathcal{H}, \ \|\phi\|=1} \left(\|L^{1/2}\phi\|^2 - \sum_{n=1}^\infty \|A(e_n)\phi\|^2 \right) \leq \varepsilon_0.$$

定理 1(A.Arai and D.Funakawa 2015) 仮定 1-3 を仮定する. また, (K,Σ) 上の非負関数 f_1, f_2 が存在して $f_1+\omega^{-1}f_2 \in X$ と

$$\gamma := \|f_1+\omega^{-1}f_2\|^2 < 1-\varepsilon_0,$$
$$\|T(k)^*\psi\| \le f_1(k)\|(H-E_0(H)+\omega(k))\psi\| + f_2(k)\|\psi\|,\ \mu - a.e.k \in K$$

が成立すると仮定する. このとき (i)(ii) が成立する:
(i) 任意の $\phi \in P_H\mathcal{H}$ は $P_{H_0}\mathcal{H}$ と overlap する.
(ii)

$$\dim D(L^{1/2}) \cap P_H\mathcal{H} \le \frac{1}{1-\gamma-\varepsilon_0} m(H_0)$$

さらに $\gamma+\varepsilon_0 < \frac{1}{m(H_0)+1}$ と $P_H\mathcal{H} \subset D(L^{1/2})$ を仮定する. このとき
(iii)

$$m(H) \le \frac{1}{1-\gamma-\varepsilon_0} m(H_0)$$

が成立する. 特に $m(H_0)=1, \gamma+\varepsilon_0 < 1/2$ の場合 $m(H)=1$ である.

2　例：QB モデル

2.1　ボソンフォック空間と QB モデルの定義

定理 1 を使い, 場の量子論の模型の縮退度を上から評価してみる. そのために, フォック空間と呼ばれるヒルベルト空間と, フォック空間上の重要な線形作用素について定義を与える. $\mathcal{W}$ を可分なヒルベルト空間とする. この時, 次のようにしてボソンフォック空間を定める:

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{W}) := \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{W} = \{\Psi = (\Psi^{(n)})_n \mid \Psi^{(n)} \in \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{W},\ n = 0, 1, \cdots\}.$$

ここで, $\otimes_{\mathrm{s}}^n$ は n 重対称テンソル積を表す. 各 $f \in \mathcal{W}$ に対して, ボソンフォック空間上で作用する生成作用素を次で定義する.

$$D(a(f)^*) := \{\Psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{W}) | \sum_{n=0}^{\infty} \|(a(f)^*\Psi)^{(n)}\|^2 < \infty\}$$
$$(a(f)^*\Psi)^{(n)} = a_{n-1}(f)^*\Psi^{(n-1)}$$
$$a_n(f)^*\Psi^{(n)} = \sqrt{n+1} S_n(f \otimes \Psi^{(n)}).$$

ここで, S_n は $\otimes^n \mathcal{W}$ 上の対称化作用素である. 生成作用 $a(f)^*$ は閉作用素であり, 生成作用素の共役でボソンフォック空間上の消滅作用素を定義する：

$$a(f)\Psi := (a(f)^*)^*\Psi.$$

線形作用素 T, S に対して, 交換子 $[T,S]$ を $[T,S] := TS - ST$ と定義する. また, ボソンフォック空間の稠密な部分空間として次の有限粒子部分空間を定める：

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b},0}(\mathcal{W}) := \{\Psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{W}) | \text{ある } N \in \mathbb{N} \text{ が存在して, 任意の } n > N \text{ に対して} \Psi^{(n)} = 0\}.$$

このとき, 生成・消滅作用素は次の正準交換関係と呼ばれる重要な関係を満たす：

$$[a(f), a(g)^*] = \langle f, g\rangle,\ \ [a(f), a(g)] = [a(f)^*, a(g)^*] = 0 \quad \text{on } \mathcal{F}_{\mathrm{b},0}.$$

シーガルの場の作用素と呼ばれるボソンフォック空間上の線形作用素は次で定義される：

$$\phi(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a(f)^*).$$

この作用素は可閉作用素であり, 閉包を取った作用素を同じ $\phi(f)$ で書くこととする.$\phi(f)$ は自己共役作用素である.

また, $\mathcal{W}$ 上の非負で単射な自己共役作用素 T に対して, ボソンフォック空間上で作用する第 2 量子化作用素を次で定義する：

$$
\begin{aligned}
&D(\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) := \{\Psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{W}) | \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{(n)}\Psi^{(n)}\|^2 < \infty\}, \\
&\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{(n)}\Psi^{(n)} := \overline{\sum_{j=1}^{n}(I \otimes \cdots \otimes T \otimes \cdots \otimes I)}\Psi^{(n)}, \\
&\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{(0)} := 0.
\end{aligned}
$$

このとき, 第 2 量子化作用素 $\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ は自己共役であり, また $E_0(\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) = 0$ となる. 特に $\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の基底状態はボソンフォック真空と呼ばれる次のベクトルである：

$$\Omega_{\mathrm{b}} := (1, 0, 0, \cdots) \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{W}).$$

次にヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を取る. 粒子のエネルギーを表す作用素として $\mathcal{H}$ 上に働く下に有界な自己共役作用素 A を取る. また, $\mathcal{H}$ 上で働く非負な自己共役作用素 $B_j,\ j = 1, 2, 3, 4$ を取る. また, $\mathbb{R}^d$ 上ボレル可測な関数 ω_{QB} で $0 < \omega_{\mathrm{QB}}(k) < \infty$, a.e.$k \in \mathbb{R}^d$ を満たすものを取る. この ω_{QB} による $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の掛け算作用素を同じ記号 ω_{QB} で書く. さらに $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の関数 λ を取る.
以上の定義から, ボース場と相互作用する量子系の模型として $\mathcal{F} := \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ で働く QB モデルを次で定義する：

$$H_{\mathrm{QB}} := A \otimes I + I \otimes \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega_{\mathrm{QB}}) + \sum_{j=1}^{4} g_j B_j \otimes \phi(\lambda)^j.$$

ここで $g_j \in \mathbb{R}$ は結合定数と呼ばれる実数であり, 特に $g_4 > 0$ を満たすものとする. 以下, $H_0^{\mathrm{QB}} := A \otimes I + I \otimes \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega)$, $H_{\mathrm{int}} := \sum g_j H_j$, $H_j := B_j \otimes \phi(\lambda)^j$ $j = 1, 2, 3, 4$ として定理 1 を使い, QB モデルの縮退度を上から評価する.

2.2 主定理

QB モデルに対して次を仮定する：

(QB.1) 各 $j = 1, 2, 3, 4$ に対して, B_J は A と強可換である. すなわち, B_J のスペクトル測度と A のスペクトル測度は可換である.

(QB.2) $\lambda \in D(\omega_{\mathrm{QB}}) \cap D(\omega_{\mathrm{QB}}^{-1/2})$.

$\mathbb{R}_+ := \{g \in \mathbb{R} \mid g > 0\}$ とする.

定理 2

(QB.1),(QB.2) を仮定する. この時, 全ての $(g_1, g_2, g_3, g_4) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ に対して H_{QB} は $D(H_{\mathrm{QB}}) = D(H_0^{\mathrm{QB}}) \cap D(H_4)$ 上の自己共役作用素である.

(QB.3) ω_{QB} は次の (1) と (2) を満たす. (1) 集合 $K_{\omega_{\mathrm{QB}}} := \{k \in \mathbb{R}^d | \omega_{\mathrm{QB}}(k) = 0\}$ のルベーグ測度は 0 である. また, $\omega_{\mathrm{QB}} \in C^\infty(\mathbb{R}^d \backslash K_{\mathrm{QB}})$ が成立する. (2) ルベーグ測度 0 の部分集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ が存在し, 次を満たす:

$$\omega_{\mathrm{QB}} \in C^\infty(\mathbb{R}^d \backslash K),\ \frac{\partial \omega_{\mathrm{QB}}}{\partial k_n}(k) \neq 0,\ n = 1, \cdots, d,\ k = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{R}^d \backslash K.$$

(QB.3) の例として次の関数がある. $\mathbb{R}^d$ 上の関数 ω_{QB} を $\omega_{\mathrm{QB}}(k) = |k^2 + m^2|^p$, $p > 0$, $m \geq 0$ と定義する. この時, $m = 0$ の場合は $K_{\omega_{\mathrm{QB}}} = \{0\}$, $K = \cup_{n=1}^{d}\{(k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{R}^d | k_n = 0\}$ となり, $m > 0$ の場合は $K_{\omega_{\mathrm{QB}}} = \phi$, $K = \cup_{n=1}^{d}\{(k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{R}^d | k_n = 0\}$ となる.

(QB.4) A はコンパクトレゾルヴェントを持つ.
この時, 特に定数 $\delta > 0$ が存在し, $0 < \delta < \sigma(A) \backslash \{E_0(A)\} - E_0(A)$ を満たす.

(QB.5) $\lambda \in D(\omega_{\mathrm{QB}}^{-1})$.

(QB.6) λ は $k_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \cdots, d$ について微分可能である.

(QB.7)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{(\partial_j \lambda(k))}{\omega_{\mathrm{QB}}(k)} \right|^2 + \left| (\partial_j \omega_{\mathrm{QB}}(k)) \frac{\lambda(k)}{\omega_{\mathrm{QB}}(k)^2} \right|^2 dk < \infty.$$

ここで, $\partial_j := \frac{\partial}{\partial k_j}$ である.

(QB.8) λ の台は有界である.

定理 3

(QB.1)-(QB.8) を仮定する. この時, 任意の $(g_1, g_2, g_3, g_4) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ に対して H_{QB} は基底状態を持つ.

注意：基底状態の存在性は結合定数に制限を掛ければ仮定 (QB.3)-(QB.8) をぐっと減らすことができる.

(QB.9) $\lambda \in C^2(\mathbb{R}^d)$.

(QB.10) $|g_3| = O(g_4^{1+\alpha})$ $\alpha > 0$.

定理 4

(QB.1)-(QB.10) を仮定する. この時十分小さな結合定数 $|g_j|$ $j = 1, 2, 3, 4$, に対して, 次が成立する.

$$m(H_{\mathrm{QB}}) \leq m(A).$$

特に A の基底状態における縮退度が 1 である時には, 十分小さな結合定数 $|g_j|$ $j = 1, 2, 3, 4$ に対して H_0^{QB} の基底状態における縮退度も 1 である.

参考文献

[A1] A. Arai, An abstract sum formula and its applications to special functions, J. Math. Anal. Appl. **167** (1992), 245–265.

[A2] A. Arai, A theorem on essential selfadjointness with application to Hamiltonians in nonrelativistic quantum field theory. J. Math. Phys. 32 (1991), no. 8, 2082-2088.

[A3] A. Arai, Essential spectrum of a self-adjoint operator on an abstract Hilbert space of Fock type and applications to quantum field Hamiltonians. J. Math. Anal. Appl. 246 (2000), no. 1, 189-216.

[A4] A. Arai, Perturbation of embedded eigenvalues: a general class of exactly soluble models in Fock spaces. Hokkaido Math. J. 19 (1990), no. 1, 1-34.

[AF] A. Arai and D. Funakawa, Upper Bounds on the Degeneracy of the Ground State in Quantum Field Models. Adv. Math. Phys. Open access journal (2015).

[AH] A. Arai and M. Hirokawa, On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model, J. Funct. Anal. **151** (1997), 455–503.

[AHH1] A. Arai, M. Hirokawa and F. Hiroshima, On the absence of eigenvectors of Hamiltonians in a class of massless quantum field models without infrared cutoff, J. Funct. Anal. **168** (1999), 470–497.

[AHH2] A. Arai, M. Hirokawa and F. Hiroshima, Regularities of ground states of quantum field models, Kyushu J. Math. **61** (2007), 321–372.

[BFS] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles, Adv. Math. **137** (1998), 299–395.

[G] Gérard, C. On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians. Ann. Henri Poincaré 1 (2000), no. 3, 443-459.

[GLL] Griesemer, M; Lieb, Elliott H.; Loss, M. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. Invent. Math. 145 (2001), no. 3, 557-595.

[F] W. G. Faris, Invariant cones and uniqueness of the ground state for fermion systems, J. Math. Phys. **13** (1972), 1285–1290.

[FG] J. Fröhlich, M. Griesemer,B. Schlein, Asymptotic completeness for Rayleigh scattering. Ann. Henri Poincaré 3 (2002), no. 1, 107-170.

[H1] F. Hiroshima, Multiplicity of ground states in quantum field models: applications of asymptotic fields, J. Funct. Anal. **224** (2005), 431–470.

[H2] F. Hiroshima, Perturbations of embedded eigenvalues in quantum field theory, Sûgaku **57** (2005), 70–92 (in Japanese); Sugaku Expositions **21** (2008), 177–207 (English translation).

[Ht] T. Hidaka, Existence of a ground state for the Nelson model with a singular perturbation. J. Math. Phys. 52 (2011), no. 2, 022102, 21 pp.

[HS] Helffer, B.; Sjöstrand, J. Équation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper. Springer Lecture Notes in Phys 345, 1989, pp118-197.

[LL] E. H. Lieb, M. Loss, Analysis, Graduate Studies in Mathemathics, American Mathematical Socienty, 1997

[M1] T. Miyao, Nondegeneracy of ground states in nonrelativistic quantum field theory, J. Operator Theory **64** (2010), 207–241.

[M2] T. Miyao, Self-dual cone analysis in condensed matter physics, Rev. Math. Phys. **23** (2011), 749–822.

[RS1] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis, Academic Press, New York, 1972.

[RS2] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier

[RS3] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory, Academic Press, New York, 1979. Analysis, Self-adjointness, Academic Press, New York, 1975.

[RS4] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1978.

[S] I. Sasaki, Ground state of a model in relativistic quantum electrodynamics with a fixed total momentum, arXiv: math-ph/0606029.