同変 Čech-de Rham 理論とその応用

藤沢 好 (Ko FUJISAWA)*

1 序

多様体の位相不変量を調べる一つの道具として de Rham コホモロジーと呼ばれるものがある．すなわち M を C^∞ 多様体とするとき, その上の p 次微分形式全体を $\Omega^p(M)$ とし外微分 d を考えると $d^2=0$ が成り立ち, これより de Rham コホモロジー

$$H^*(M) = \mathrm{Ker}d/\mathrm{Im}d$$

が定義される．これは比較的ベタな計算で多様体の不変量を求められうる対象ではあるが, まだボンヤリしている点がある．たとえば $E \to M$ をベクトル束とするとき, その上の微分形式のファイバー積分は通常ファイバー方向に関してコンパクトな台を持つ必要がある．これでは, たとえば Thom 類などを考える場合, それを代表する微分形式が（適当な正規化により）式としてボンヤリしてしまいがちで, 特性類や種々の不変量をベタな計算で導出するのに不向きである．これらの欠点を解消する一つ方法として諏訪立雄教授の Čech-de Rham 理論がある．本稿ではこの Čech-de Rham 理論をその同変版へ拡張したもの、すなわち Lie 群の作用が与えられた空間に対して定義される不変量である同変コホモロジーへ拡張した理論について簡単に説明する (通常の Čech-de Rham 理論は群が自明に作用する特殊な場合だと思えることに注意しておく）

2 Cartan 複体による同変コホモロジーの定義

G をコンパクト Lie 群, その Lie 環を $\mathfrak{g}$ M を G-多様体とする．このとき Lie 環 $\mathfrak{g}$ には G の随伴作用 $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ があり, また de Rham 複体 $\Omega^*(M)$ には $g^{-1} \in G$ による左移動 L_g^{-1} から誘導される引き戻し $g^* := (L_{g^{-1}})^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ によって作用する．

定義 2.1　M 上の同変微分形式とは，多項式写像 $\alpha : \mathfrak{g} \to \Omega^*(M)$ で次の図式が可換となるものをいう：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "Ad_g"'] & \Omega^*(M) \arrow[d, "g^*"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "\alpha"'] & \Omega^*(M) \end{tikzcd}$$

これは $\Omega^*_G(M) := (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(M))^G$（$S(\mathfrak{g}^*)$ は $\mathfrak{g}^*$ の対称代数, もしくは $\mathfrak{g}$ 上の多項式環）の元とみなされ, 次のようにして DGA をなす:

$$\deg\alpha = 2(\text{多項式次数}) + (\text{微分形式の次数})$$
$$d_{eq}\alpha(X) = d\alpha(X) - \iota_X\alpha(X)\ (X \in \mathfrak{g})$$

* 北海道大学大学院理学院数学専攻 s143035@math.sci.hokudai.ac.jp

ここで ι_X はベクトル場 $X_M = \frac{d}{dt}|_{t=0}\exp(-tX)$ による内部微分である.

定義 2.2　$(\Omega_G^*(M), d_{eq})$ を Cartan 複体と呼び, そのコホモロジー

$$H_G^*(M) = \mathrm{ker} d_{eq}/\mathrm{Im} d_{eq}$$

を M の同変 de Rham コホモロジーと呼ぶ

3　同変 Čech-de Rham コホモロジー

簡単のため（また応用のため）G-多様体 M が 2 つの G-不変な開集合による被覆 $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ を持つものとする.

定義 3.1　M の被覆 $\mathcal{U}$ に対して

$$\Omega_G^r(\mathcal{U}) = \Omega^r(U_0) \oplus \Omega^r(U_1) \oplus \Omega^{r-1}(U_0 \cap U_1)$$

$$D_{eq} : \Omega_G^r(\mathcal{U}) \to \Omega_G^{r+1}(\mathcal{U}), \quad (\xi_0, \xi_1, \xi_{01}) \mapsto (d_{eq}\xi_0,\ d_{eq}\xi_1,\ \xi_1 - \xi_0 - d_{eq}\xi_{01})$$

を考えると, $(\Omega_G^*(\mathcal{U}), D_{eq})$ は複体をなし, これを Čech Cartan 複体と呼ぶ. またそのコホモロジーを $H_G^*(\mathcal{U})$ と書き, $\mathcal{U}$ に関する同変 Čech-de Rham コホモロジーと呼ぶ.

定理 3.2　自然な準同型 $r : \Omega_G^r(M) \to \Omega_G^r(U_0) \oplus \Omega_G^r(U_1)$ は次のコホモロジーの同型を誘導する:

$$H_G^r(M) \xrightarrow{\sim} H_G^r(\mathcal{U})$$

これは $\mathcal{U}$ に従属する同変 1 の分割を用いて証明される. 同変 Čech-de Rham コホモロジーを用いれば自然に同変相対 de Rham コホモロジーが定義される:

定義 3.3　$(\Omega_G^*(\mathcal{U}), D_{eq})$ の部分複体として

$$\Omega_G^r(\mathcal{U}, U_0) = \{\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_{01}) \in \Omega_G^r(\mathcal{U}) \mid \xi_0 = 0\}$$

を考え, このコホモロジーを $H_G^*(\mathcal{U}, U_0)$ と書き, 同変相対 de Rham コホモロジーと呼ぶ

定義 3.4　$\pi : E \to M$ を G-同変 r 次元ベクトル束とする（すなわち群が束写像として作用しているベクトル束）. このとき E の G-被覆 $\mathcal{W} = \{W_0, W_1\}$ を $W_0 = E \setminus M,\ W_1 = E$ と定める. またある G-不変な Riemann 計量に関する E の

$$\pi_1 : T_1 \to M \text{ を閉単位 } r\text{-球束}, \ \pi_{01} : T_{01} \to M \text{ を単位 } (r-1)\text{-球面束}$$

を考える（ただし T_{01} は T_1 の境界の向きと逆）. このときファイバー積分 π_* を次のように定める:

$$\pi_* : \Omega_G^p(\mathcal{W}, W_0) \to \Omega_G^{p-r}(M), \quad \alpha = (0, \alpha_1, \alpha_{01}) \mapsto \pi_*\alpha := (\pi_1)_*\alpha_1 + (\pi_{01})_*\alpha_{01}$$

ここで $(\pi_1)_*$ および $(\pi_{01})_*$ は通常のファイバー積分である

定理 3.5　ファイバー積分 $\pi_* : \Omega_G^p(\mathcal{W}, W_0) \to \Omega_G^{p-r}(M)$ はコホモロジーの準同型を誘導する:

$$\pi_* : H_G^p(\mathcal{W}, W_0) \to H_G^{p-r}(M)$$

定理 3.6　次の $\psi_{eq}^E \in H_G^r(\mathcal{W}, W_0)$ を同変 Thom 類と呼ぶ：

$$\pi_* : H_G^r(\mathcal{W}, W_0) \to H_G^0(M), \quad \pi_* \psi_{eq}^E = 1$$

これは次のような同変 Čech-de Rham コサイクルで代表される:

$$(0, \pi^* \varepsilon_{eq}, -\psi_{eq}) \in \Omega_G^r(\mathcal{W}, W_0)$$

ここで ε_{eq} は M 上の d_{eq}-閉同変 r-形式（同変 Euler 類）, ψ_{eq} は $E \setminus M$ 上の同変 $(r-1)$-形式（同変角形式）で以下の等式を満たす

$$d_{eq}\psi_{eq} = -\pi^* \varepsilon_{eq} \text{ on } E \setminus M, \quad -(\pi_{01})_* \psi_{eq} = 1$$

4　同変特性類とその局所化

3 章では同変 Thom 類の比較的明示的なコサイクルの表示を見たが, この章では同変 Chern-Weil 理論と諏訪理論を利用して同変 Thom 類の同変 top Chern 類の局所化による定式化について論じる．これはベタな微積の計算で確かめることができ, Mathai-Quillen らによるフェルミオン積分や超対称性の言葉を経由した同変 Thom 形式の表示と比べて頗る初等的である．以下では $\pi : E \to M$ を G-同変 r-次元ベクトル束とし, E に値を持つ微分形式 $\Omega^*(M, E)$ には自然な G 作用が与えられているとする．

定義 4.1　接続 $\nabla : \Omega^*(M, E) \to \Omega^{*+1}(M, E)$ で

$$g \cdot \nabla = \nabla \cdot g$$

を満たすものを G-不変接続と呼ぶ.

定義 4.2　G-不変接続 ∇ に対し

$$(\nabla_{eq}\alpha)(X) := (\nabla - \iota_X)\alpha(X) \quad \alpha \in S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(M, E)$$

を G-同変接続と呼び，このとき

$$\nabla_{eq} : \Omega_G^*(M, E) \to \Omega_G^{*+1}(M, E)$$

となり, また $K_{eq}(X) = (\nabla_{eq})(X)^2 + L_X^E$ を G-同変曲率と呼ぶ．ここで L_X^E は $\Omega_G^0(M, E)$ への G 作用から誘導される無限小変換で, このとき自然に $K_{eq} \in \Omega_G^2(M, End(E))$ とみなせる．

定義 4.3　不変多項式 $\phi : M(r, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ に対して G-同変特性類が

$$\phi(E)_{eq} = [\phi(\nabla_{eq})] := [\phi(K_{eq})] \in H_G^*(M)$$

で定まる

これは通常の Chern-Weil 理論と同様に Bott の difference form を用いて同変接続の取り方に依らず定義されることがわかる．

定義 4.4　$\pi : E \to M$ 上の同変接続 ∇_{eq} に対し同変 Chern 形式を

$$c^*(\nabla_{eq}) := \det(I_r + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} K_{eq}) = 1 + c_{eq}^i(\nabla_{eq}) + \cdots + c_{eq}^l(\nabla_{eq})$$

で定め, そのコホモロジー類

$$c^*_{eq}(E) = 1 + c^1_{eq}(E) + \cdots + c^l_{eq}(E) \in H^*_G(M)$$

を同変 Chern 類と呼ぶ

これらの同変特性類は通常の同変コホモロジーの元として定められたが, 次に同変 Čech-de Rham コホモロジーにおける同変特性類について考える.

$\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ を M の G-被覆とし, ∇^0_{eq} を $E|_{U_0}$ 上の G-同変接続, ∇^1_{eq} を $E|_{U_1}$ 上の G-同変接続とする. このとき同変接続 $\tilde{\nabla}_{eq} = (1-t)\nabla^0_{eq} + t\nabla^1_{eq} : E \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ と自然な射影 $\rho : M \times [0,1] \to M$ に対して Bott の difference form を

$$\phi(\nabla^0_{eq}\nabla^1_{eq}) := \rho_*\phi(\tilde{\nabla}_{eq}) \ \in \Omega^*_G(U_0 \cap U_1)$$

と定めると, これは

$$D_{eq}\phi(\nabla^0_{eq}, \nabla^1_{eq}) = \phi(\nabla^1_{eq}) - \phi(\nabla^0_{eq})$$

を満たす. これより

$$\phi(\nabla^*_{eq}) = (\phi(\nabla^0_{eq}), \phi(\nabla^1_{eq}), \phi(\nabla^0_{eq}, \nabla^1_{eq})) \in \Omega_G(\mathcal{U})$$

は D_{eq}-閉で同変 Čech de Rham コサイクルを定める

定理 4.5 同型 $r : H^r_G(M) \xrightarrow{\sim} H^r_G(\mathcal{U})$ により, $\phi(E)_{eq} = [\phi(\nabla^*_{eq})]$.

この定理より $[\phi(\nabla^*_{eq})]$ は同変 Čech-de Rham コホモロジーにおける同変特性類と呼ぶに相応しいものであることがわかる. また $[\phi(\nabla^*_{eq})]$ は接続の組の取り方に依らずに定まる.

次に同変特性類の局所化について簡単に説明する:

$S \subset M$ を G-不変閉部分多様体とし, $U_0 = M \setminus S$, U_1 を S の G-不変な開近傍とする. このとき $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ は M の G-被覆となり, このとき短完全系列

$$0 \to \Omega^*_G(\mathcal{U}, U_0) \to \Omega^*_G(\mathcal{U}) \to \Omega^*_G(U_0) \to 0$$

から誘導されるコホモロジーの完全系列

$$\cdots \to H^*_G(M, M \setminus S) \to H^*_G(M) \to H^*_G(M \setminus S) \to \cdots$$

がある. このときある幾何学的な理由で特性類 $\phi_G(E)_{eq} \in H^*_G(M)(= H^*_G(\mathcal{U}))$ が $H^*_G(M \setminus S)$ で消滅するときがあり, このとき系列の完全性より $H^*_G(M, M \setminus S)(= H^*_G(\mathcal{U}, U_0))$ に $\phi(E)_{eq}$ に対応する元があるが, 一般にこれは一意ではない. しかし実は特性類が微分形式のレベルで消滅している場合には対応する元が一意に定まる. これを特性類 $\phi_G(E)_{eq}$ の局所化と呼ぶ. その特別な場合として次の状況を考える.

G-同変ベクトル束 $\pi : E \to M$ に対し $\mathcal{W} = \{W_0, W_1\}$ を 3 章と同様にして定める. このとき対角切断

$$s_\Delta : E \to \pi^* E$$

を考える. また D^0_{eq} を s_Δ-trivial な π^*E の W_0 上の同変接続, D^1_{eq} を π^*E の W_1 上の同変接続とする. このとき $c^r(\pi^*E, s_\Delta)_{eq}$ を

$$c^r(D^*_{eq}) = (0, c^r(D^1_{eq}), c^r(D^0_{eq}, D^1_{eq})) \in \Omega^{2r}_G(\mathcal{W}, W_0)$$

で代表されるコホモロジー類とする.

定理 4.6　上の設定のもと, 次の等式が成り立つ.

$$c^l(\pi^* E, s_\Delta)_{eq} = \psi_{eq}^E$$

注意 4.7　たとえばこの等式を 1 点が底空間の場合, すなわちベクトル束 $\pi : \mathbb{C}^l \to \{0\}$ の場合で考えると D_{eq}^0 や D_{eq}^1 は具体的に与えることで、直接計算で上の等式を確かめることができる.

参考文献

[1] Nicole Berline, Ezra Getzler, and Michele Vergne. Heat kernels and Dirac operators. Springer Science & Business Media, 1992.

[2] Tatsuo Suwa. Complex analytic geometry, in preparation. *World Scientific.*

[3] Tatsuo Suwa. Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations. *Actualités Mathématiques*, 1998.