$\mathbb{Z}^d$ サブシフトにおける Brudno の定理

布田　徹 * 　(北海道大学)

概要

Brudno の定理とは、位相力学系のエルゴード的測度において、その Kolmogorov-Sinai エントロピー (KS エントロピー) と、Kolmogorov 複雑度の概念に基づいて定義される「軌道複雑度」がほとんどいたるところ一致することを主張する定理である。本稿では位相力学系として特に記号力学系の場合を考え、$\mathbb{Z}^d$-action の Brudno の定理を紹介する。また、その応用として、Kolmogorov 複雑度を用いて d 次元 Ising モデルの圧力関数を表せることをみる。本研究は戸ノ崎美穂氏 (北海道大学) との共同研究に基づく。

Keywords. Brudno's theorem, Kolmogorov-Sinai entropy, Kolmogorov complexity, subshifts, $\mathbb{Z}^d$-action, pressure.

1　はじめに

A. A. Brudno は、位相力学系の点が描く「軌道複雑度」を Kolmogorov 複雑度の考えを用いて定義し、その「軌道複雑度」と KS エントロピーの同等性を明らかにした [2, THEOREM 3.1]。本稿では、一般の位相力学系ではなく、より扱いやすい記号力学系のサブシフトを考え、その場合の Brudno の定理を考える。以下、単に Brudno の定理といった場合、記号力学系のサブシフトにおける Brudno の定理を指すことにする。また、[2] においてシフトの作用は 1 次元であったが、本稿では d 次元のシフト作用を扱う。$\mathbb{Z}^d$-action に Brudno の定理を拡張しようという部分的な試みとして [8] がある。S. G. Simpson は $\mathbb{Z}^d$-action の記号力学系において、「軌道複雑度」と位相エントロピーが一致する特別な点の存在を示した [8]。我々は、[3] において、エルゴード的測度に対して、ほとんどいたるところ「軌道複雑度」と KS エントロピーが等しいことを示し、Brudno の定理を $\mathbb{Z}^d$-action へと拡張した。$\mathbb{Z}^d$-action に拡張したことにより、物理的に興味のある d 次元 Ising モデルの圧力関数を Brudno の定理を用いて表現することができる。

以下、Section 2 で、エルゴード理論、アルゴリズム的情報理論、記号力学系から主定理に必要な最小限の準備をし、Section 3 で主定理とその応用を述べる。

* E-mail: t-fuda@math.sci.hokudai.ac.jp

2 準備

本稿を通して $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$, $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ とし、$d \in \mathbb{N}$ を任意に固定する。さらに、$G := \mathbb{Z}^d$ or $G := \mathbb{Z}_+^d$ とし、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Lambda_n := \{g = (g_i)_{i=1}^d \in G : \forall i \in \{1, \cdots, d\}, |g_i| < n\}$$

と定義する。$|\cdot|$ によって集合の濃度を表すことにすると、明らかに

$$|\Lambda_n| = \begin{cases} (2n-1)^d & (G = \mathbb{Z}^d), \\ n^d & (G = \mathbb{Z}_+^d), \end{cases}$$

である。

2.1 エルゴード理論

定義 2.1（保測力学系） $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を確率空間とする。X 上の写像の族 $\mathcal{T} = (T^g)_{g \in G}$ が次の条件を満たすとする：

1. $\mathcal{T}$ は群 G の X 上の可測な作用。(i.e. 任意の $g \in G$ に対して $T^g : X \to X$ は可測であり、$T^0 = I_X$ かつ $\forall g, g' \in G, T^{g+g'} = T^g \circ T^{g'}$)
2. μ は $\mathcal{T}$-不変。(i.e. $\forall g \in G, \forall A \in \mathfrak{B}, \mu(T^{-g}A) = \mu(A)$)

このとき、四つ組 $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$ を保測力学系という。

保測力学系 $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$ に対して、$\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}) := \{A \in \mathfrak{B} : \forall g \in G, \mu(T^{-g}A \triangle A) = 0\}$ とする。$\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T})$ の元を $\mathcal{T}$-不変 (mod μ) 集合という。

定義 2.2（エルゴード性） $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$ を保測力学系とする。このとき、任意の $A \in \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T})$ に対して、$\mu(A) = 0$ または $\mu(A) = 1$ が成り立つとき、$(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$ はエルゴード的であるという。

定義 2.3（μ-分割） $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を確率空間とする。可測な集合族 $\alpha = \{A_i : i \in I\} \subset \mathfrak{B}$ は次の条件を満たすとき X の μ-分割であるという：

$$\mu(A_i \cap A_j) = 0 \ (i \neq j), \ \mu\left(X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0 \text{ and } \mu(A_i) > 0 \ (\forall i \in I).$$

したがって、X の μ-分割 α は高々可算である。特に、$|I| < \infty$ であるとき、α は有限 μ-分割であるという。α, β を X の μ-分割であるとする。このとき、α と β の細分を

$$\alpha \vee \beta := \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta, \mu(A \cap B) > 0\}.$$

と定義する。$\alpha \vee \beta$ も μ-分割である。

定義 2.4（μ-分割の情報量とエントロピー） $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を確率空間とし、α を X の μ-分割であるとする。このとき、α の情報量とは次式で定義される可測関数のことである：

$$I_\alpha(x) := -\sum_{A\in\alpha} \log_2 \mu(A) \cdot 1_A(x).$$

α のエントロピーとは次式で定義される平均情報量のことである：

$$H(\alpha) := \int_X I(\alpha) d\mu = \sum_{A\in\alpha} \varphi(\mu(A)).$$

ここで $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は次式で定義される関数である：

$$\varphi(t) := \begin{cases} -t\log_2 t & (t > 0), \\ 0 & (t = 0). \end{cases}$$

ここでは Kolmogorov 複雑性の理論との整合性を考慮し、対数の底を 2 にしている。

定義 2.5（分割に関する保測力学系のエントロピー） $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$ を保測力学系とし、α を X の μ-分割とする。各 $g \in G$ に対して、$T^{-g}\alpha := \{T^{-g}A : A \in \alpha\}$ とし、有限部分集合 $\Lambda \subset G$ に対して、$\alpha^\Lambda := \bigvee_{g\in G} T^{-g}\alpha$ と定義する。保測力学系 $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$ の分割 α に関するエントロピー $h(\mu, \alpha, \mathcal{T})$ を次式で定義する*：

$$h(\mu, \alpha, \mathcal{T}) := \inf_{n>0} \frac{1}{|\Lambda_n|} H(\alpha^{\Lambda_n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} H(\alpha^{\Lambda_n}).$$

定義 2.6（Kolmogorov-Sinai エントロピー） 保測力学系 $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$ の Kolmogorov-Sinai entropy エントロピー (KS エントロピー) を次式で定義する：

$$h_{\mathcal{T}}(\mu) := \sup\{h(\mu, \alpha, \mathcal{T}) : \alpha \text{ is a } \mu\text{-partition with } H(\alpha) < \infty\}.$$

定義 2.7（μ-生成分割） $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$ を保測力学系とする。$\alpha^G = \mathfrak{B} \mod \mu$ が成り立つとき、μ-分割 α を μ-生成分割であるという。

定理 2.8（Kolmogorov-Sinai） $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$ を保測力学系とし、α を μ-生成分割とする。このとき、$H(\alpha) < \infty$ ならば $h_{\mathcal{T}}(\mu) = h(\mu, \alpha, \mathcal{T})$ が成り立つ。

Proof. See [4]. ∎

定義 2.9（位相力学系） 組み $(X, \mathcal{T})$ は次の条件を満たすとき、位相力学系であるという：

1. X はコンパクト距離化可能空間である。
2. $\mathcal{T} = (T^g)_{g\in G}$ は X 上の G の連続な作用である。(i.e. 任意の $g \in G$ に対して $T^g : X \to X$ は連続であり、$T^0 = I_X$ かつ $\forall g, g' \in G, T^{g+g'} = T^g \circ T^{g'}$)

---

* 二つ目の等号は定理として導き出される。詳しくは [4] を参照せよ。

位相力学系 $(X,\mathfrak{T})$ に対して、$\mathfrak{B}(X)$ を X の Borel σ-代数とする。$\mathfrak{T}$ は X 上の G の可測な作用でもあることに注意。さらに、Borel-可測空間 $(X,\mathfrak{B}(X))$ に対して、$M(X)$ を $(X,\mathfrak{B}(X))$ 上のすべての確率測度からなる集合、$M(X,\mathfrak{T})$ を $(X,\mathfrak{B}(X))$ 上のすべての $\mathfrak{T}$-不変な確率測度からなる集合、$EM(X,\mathfrak{T})$ を $(X,\mathfrak{B}(X))$ 上のすべてのエルゴード的確率測度からなる集合とする。$\mathfrak{T}$-不変な確率測度の存在は次の定理により保障される。

定理 2.10（Krylov-Bogolubov） $(X,\mathfrak{T})$ を位相力学系とする。このとき、$X \neq \emptyset$ ならば $M(X,\mathfrak{T}) \neq \emptyset$ である。

Proof. See [4]. ∎

$\mu \in M(X,\mathfrak{T})$ ならば $(X,\mathfrak{B}(X),\mu,\mathfrak{T})$ は明らかに保測力学系である。

定義 2.11（上半連続関数） Y を位相空間とするとき、

$$USC(Y) := \{f : Y \to [-\infty,\infty) : \forall c \in \mathbb{R}, \{y \in Y : f(y) < c\} \text{ is open}\},$$

と定義し、$USC(Y)$ の元を上半連続関数という。

定義 2.12（圧力、位相エントロピー、平衡状態） $(X,\mathfrak{T})$ を位相力学系とし、$\psi \in USC(X)$, $\inf \psi > -\infty$ とする。このとき、ψ の圧力を次式で定義する：

$$p(\psi) := \sup_{\mu \in M(X,\mathfrak{T})} (h_{\mathfrak{T}}(\mu) + \mu(\psi))$$

ただし、$\mu(\psi) := \int_X \psi(x) d\mu(x)$ である。測度 $\nu \in M(X,\mathfrak{T})$ は、次式を満たすとき $\psi \in USC(X)$ に関する平衡状態であるという：

$$p(\psi) = h_{\mathfrak{T}}(\nu) + \nu(\psi).$$

特に $p(0) = \sup_{M(X,\mathfrak{T})} h_{\mathfrak{T}}(\mu)$ を位相力学系 $(X,\mathfrak{T})$ の位相エントロピーと呼ぶ。

定理 2.13（エルゴード分解） $(X,\mathfrak{T})$ を位相力学系とする。各 $\mu \in M(X,\mathfrak{T})$ に対して、$M(X,\mathfrak{T})$ 上の測度 ρ が唯一つ存在し、

1. 任意の有界可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対して、

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{EM(X,\mathfrak{T})} \left\{ \int_X f(x) d\nu(x) \right\} d\rho(\nu),$$

2. $\rho(EM(X,\mathfrak{T})) = 1$.

任意の可測集合 $A \in \mathfrak{B}(X)$ に対して $\mu(A) = \int_{EM(X,\mathfrak{T})} \nu(A) d\rho(\nu)$ であるから、$\mu = \int_{EM(X,\mathfrak{T})} \nu d\rho(\nu)$ と表し、これを μ のエルゴード分解と呼ぶ。

Proof. See [4, 7, 9].

定理 2.14（Jacobs） $(X,\mathcal{T})$ を位相力学系とする。$\mu \in M(X,\mathcal{T})$ に対してそのエルゴード分解を $\mu = \int_{EM(X,\mathcal{T})} \nu d\rho(\nu)$ とするとき、次が成り立つ：

$$h_{\mathcal{T}}(\mu) = \int_{EM(X,\mathcal{T})} h_{\mathcal{T}}(\nu) d\rho(\nu).$$

Proof. See [4, 9].

2.2 Kolmogorov 複雑性

$\mathcal{A}$ を空でない有限集合とする。一般性を失うことなく $\mathcal{A} := \{0, 1, \cdots, N\}$ $(N \in \mathbb{Z}_+)$ としてよい。$\mathcal{A}$ 上のすべての有限記号列を

$$\mathcal{A}^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n = \{\lambda, 0, 1, \cdots, N, 00, 01, \cdots, 0N, 10, \cdots, 1N, \cdots, NN, 000, \cdots\}$$

と定義する。ここで、$\mathcal{A}^0 = \{\lambda\}$ であり、λ は空列を表すとする。次の全単射 $I_{\mathcal{A}^* \to \sharp} : \mathcal{A}^* \to \sharp$ $(\sharp \in \{\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}\})$ を用いて、$\mathcal{A}^*$ と $\mathbb{Z}_+$ または $\mathbb{Z}$ を同一視することにする。

$$I_{\mathcal{A}^* \to \mathbb{Z}_+}(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (N+1)^k + \sum_{k=1}^{n} a_k (N+1)^{n-k}, & x = a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathcal{A}^n \ (n \in \mathbb{N}), \\ 0, & x = \lambda, \end{cases}$$
$$I_{\mathcal{A}^* \to \mathbb{Z}}(x) := \alpha\left(I_{\mathcal{A}^* \to \mathbb{Z}_+}(x)\right)$$

ここで、任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して $\alpha(n) := (-1)^{n+1} \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ である。たとえば、$\mathcal{A} = \{0, 1\}$ の場合は次のようになる：

x	λ	0	1	00	01	10	11	000	001	$\cdots$
$I_{\{0,1\}^* \to \mathbb{Z}_+}(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
x	λ	0	1	00	01	10	11	000	001	$\cdots$
$I_{\{0,1\}^* \to \mathbb{Z}}(x)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	$\cdots$

簡単のため、$I_{\sharp \to \mathcal{A}^*} := I_{\mathcal{A}^* \to \sharp}^{-1}$. とする。

二つの記号列をつなげる写像 $\mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathcal{A}^*$ を連接という。記号列 $x \in \mathcal{A}^*$ の長さを $l(x)$ で表す。明らかに、任意の $x, y \in \mathcal{A}^*$ に対して $l(xy) = l(x) + l(y)$ である。

$x, y \in \mathcal{A}^*$ に対して、ある $z \in \mathcal{A}^*$ が存在して $y = xz$ であるとき、x は y の接頭語 (prefix) であるという。部分集合 $A \subset \mathcal{A}^*$ は、任意の元 $x \in A$ に対して、$A \setminus \{x\}$ の元が x の接頭語にならないとき、prefix-free であるという。$x \in \mathcal{A}^*$ に対して

$$\bar{x} := \underbrace{1 \cdots 1}_{l(x)} 0x$$

とする。$l(\bar{x}) = 2l(x) + 1$ である。

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を空でない有限集合とする。$\mathcal{D} \subset \mathcal{A}_1^*$ に対して写像 $f: \mathcal{D} \to \mathcal{A}_2^*$ を考える。$\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{A}_1^*$ であるとき、f を部分関数といい、$f: \mathcal{A}_1^* \rightsquigarrow \mathcal{A}_2^*$ とかくことにする。$\mathcal{D} = \mathcal{A}_1^*$ であるとき、f を全域関数という。部分関数 $\phi: \mathcal{A}_1^* \rightsquigarrow \mathcal{A}_2^*$ は、あるチューリングマシン M によって計算されるとき、再帰的であるという。部分再帰関数 $\phi: \mathcal{A}_1^* \rightsquigarrow \mathcal{A}_2^*$ の定義域 $\mathrm{dom}(\phi)$ が prefix-free であるとき、ϕ を部分再帰 prefix 関数という。

$\phi: \{0,1\}^* \rightsquigarrow \mathcal{A}^*$ を部分再帰 prefix 関数とする。このとき、任意の $x \in \mathcal{A}^*$ に対して、x の ϕ に関する複雑度 $K_\phi(x)$ を

$$K_\phi(x) := \begin{cases} \min\{l(p) : p \in \phi^{-1}(x)\}, & (\phi^{-1}(x) \neq \emptyset), \\ \infty & (\phi^{-1}(x) = \emptyset) \end{cases}$$

によって定義する。さらに、すべての部分再帰 prefix 関数 $\psi: \{0,1\}^* \rightsquigarrow \mathcal{A}^*$ に対して、ある定数 $c_{\phi,\psi} \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$\forall x \in \mathcal{A}^*, \quad K_\phi(x) \leq K_\psi(x) + c_{\phi,\psi}$$

が成り立つとき、ϕ は additively optimal であるという。

定理 2.15 additively optimal な部分再帰 prefix 関数が存在する。

Proof. See [5].

additively optimal な部分再帰 prefix 関数は全射である。

定義 2.16 適当な additively optimal な部分再帰 prefix 関数 $\phi: \{0,1\}^* \rightsquigarrow \mathcal{A}^*$ を一つ固定する。このとき、$x \in \mathcal{A}^*$ の prefix Kolmogorov complexity を次のように定義する：

$$K(x) := K_\phi(x).$$

2.3 $\mathbb{Z}^d$ サブシフト

Σ を空でない有限集合とし、$\Omega := \Sigma^G$ とする。Σ の離散位相の積位相によって Ω に位相を与えると、チコノフの定理により、Ω はコンパクト位相空間になることがわかる。この位相は、任意の $\omega = (\omega_g)_{g\in G}, \omega' = (\omega'_g)_{g \in G} \in \Omega$ に対して、次のように定められる距離 d が生成する位相でもある：

$$d(\omega, \omega') := 2^{-n(\omega,\omega')},\ n(\omega,\omega') := \sup\{n \in \mathbb{N} : \forall g \in \Lambda_n, \omega_g = \omega'_g\}.$$

したがって、Ω はコンパクト距離空間である。任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $s \in \Sigma^{\Lambda_n}$ に対して、s のシリンダー集合を $[\![s]\!] := \{\omega \in \Omega : \omega \restriction \Lambda_n = s\}$ と定める。$[\![s]\!]$ は開かつ閉集合である。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathcal{C}_n$ を Σ^{Λ_n} 上のシリンダー集合の族

$$\mathcal{C}_n := \{[\![s]\!] : s \in \Sigma^{\Lambda_n}\}$$

とし、$\mathcal{C} := \bigcup_n \mathcal{C}_n$ とする。$\mathcal{C}$ は Borel σ-代数 $\mathfrak{B}(\Omega)$ を生成する。次に、

$$\Sigma^{\Lambda_*} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^{\Lambda_n}$$

とおく。ここで、$\Sigma^{\Lambda_0} := \{\lambda\}$ であり、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$\Sigma^{\Lambda_n} := \{(\omega_g)_{g\in\Lambda_n} : \forall g \in \Lambda_n, \omega_g \in \Sigma\}$ である。任意の部分集合 $V \subset \Sigma^{\Lambda_*}$ に対して、$[\![V]\!] := \bigcup_{s\in V}[\![s]\!]$ とする。

写像 $\sigma^g : \Omega \to \Omega$ を $g \in G$ によるシフト、つまり、任意の $\omega = (\omega_g)_{g\in G}$ に対して $(\sigma^g\omega)_i := \omega_{i+g}$ であるものとする。$\sigma := (\sigma^g)_{g\in G}$ とすると、σ は Ω 上の G の連続な作用であり、したがって、(Ω, σ) は位相力学系である。$\sigma : G \times \Omega \ni (g, \omega) \mapsto \sigma^g(\omega) \in \Omega$ であることに注意。

空でない部分集合 $S \subset \Omega$ は、シフト不変 (i.e. $\forall g \in G, \sigma^g(S) = S$) かつ S が閉であるとき、サブシフトであるという。$S \subset \Omega$ がサブシフトであるとき、$(S, \sigma \restriction (G \times S))$ は位相力学系である。

関数 $f : G \to \mathbb{Z}_+$ は、部分再帰 prefix 関数 $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ が存在して、任意の $(x_1, \cdots, x_d) \in G$ に対して次のようにかけるとき、計算可能であるという：

$$f(x_1, \cdots, x_d) = (I_{\{0,1\}^* \to \mathbb{Z}_+} \circ \phi)\left(\overline{I_{\sharp\to\{0,1\}^*}(x_1)} \cdots \overline{I_{\sharp\to\{0,1\}^*}(x_{d-1})} I_{\sharp\to\{0,1\}^*}(x_d)\right)$$

ただし、

$$\sharp = \begin{cases} \mathbb{Z}, & G = \mathbb{Z}^d, \\ \mathbb{Z}_+, & G = \mathbb{Z}_+^d. \end{cases}$$

全単射な計算可能関数 $f : G \to \mathbb{Z}_+$ で、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$f(\Lambda_n) = \{0, 1, \cdots, |\Lambda_n| - 1\}$$

であるようなものを一つ固定し、写像 $\mathcal{G} : \Sigma^{\Lambda_*} \to \Sigma^*$ を次のように定義する：

$$\mathcal{G}(s) := \begin{cases} s_{f^{-1}(0)} \cdots s_{f^{-1}(|\Lambda_n|-1)}, & s = (s_g)_{g\in\Lambda_n} \in \Sigma^{\Lambda_n} \ (n \in \mathbb{N}), \\ \lambda, & s = \lambda. \end{cases}$$

$s \in \Sigma^{\Lambda_*}$ の prefix Kolmogorov complexity を

$$\mathsf{K}(s) := K(\mathcal{G}(s))$$

と定義する。

定義 2.17（Kolmogorov complexity density） 任意の $\omega \in \Omega$ に対して、upper Kolmogorov complexity density と lower Kolmogorov complexity density をそれぞれ

$$\overline{\mathcal{K}}(\omega) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathsf{K}(\omega \restriction \Lambda_n)}{|\Lambda_n|}, \quad \underline{\mathcal{K}}(\omega) := \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathsf{K}(\omega \restriction \Lambda_n)}{|\Lambda_n|}$$

と定義する。もし $\overline{\mathcal{K}}(\omega) = \underline{\mathcal{K}}(\omega)$ であるとき、この量を単に $\mathcal{K}(\omega)$ と表す。

注意 2.18 $\overline{\mathcal{K}}(\omega)$ と $\underline{\mathcal{K}}(\omega)$ は、prefix Kolmogorov complexity を定義する際に用いる additively optimal な部分再帰 prefix 関数 ϕ と $\mathcal{G}$ の選び方に依存しない。

3　主定理とその応用

以上の準備のもと、主定理を述べる。Σ を空でない有限集合とし、$S \subset \Omega\ (:= \Sigma^G)$ をサブシフトとする。さらに、Ω 上の G のシフト作用 σ の S への制限を ς とする。このとき、(S, ς) は位相力学系である。

定理 3.1（Brudno's theorem for $\mathbb{Z}^d$ (or $\mathbb{Z}^d_+$) subshifts） $\mu \in EM(S, \varsigma)$ ならば、次が成り立つ：

$$\mathcal{K}(\omega) = h_\varsigma(\mu), \quad \mu\text{-a.e.}\omega \in S. \tag{3.1}$$

証明は省略する。詳細は [3] を参照せよ。

例 3.2（Bernoulli シフト） $\mathbb{Z}^d$ または $\mathbb{Z}^d_+$ シフト空間を、以前と同じ記号 (Ω, σ) で表す。このとき、Σ 上の確率分布 $q = (q_i : i \in \Sigma)$ に対応する $\mathfrak{B}(\Omega)$ 上の Bernoulli 測度を $\mu := q^{\times G}$ とする。このとき μ はエルゴード的であり、$h_\sigma(\mu) = \sum_{i\in\Sigma} \varphi(q_i)$ であるから、定理 3.1 より μ-a.e. $\omega \in \Omega$ に対して次が成り立つ：

$$\mathcal{K}(\omega) = \sum_{i\in\Sigma} \varphi(q_i).$$

定理 3.3 $\mu \in M(S, \varsigma)$ ならば、次が成り立つ：

$$h_\varsigma(\mu) = \mu(\mathcal{K}). \tag{3.2}$$

Proof. $\mu = \int_{EM(S,\varsigma)} \nu d\rho(\nu)$ をエルゴード分解とすると、定理 2.13、定理 2.14、定理 3.1 より、

$$\int_S \mathcal{K}(\omega) d\mu(\omega) = \int_{EM(S,\varsigma)} \left\{ \int_S \mathcal{K}(\omega) d\nu(\omega) \right\} d\rho(\nu) = \int_{EM(S,\varsigma)} h_\varsigma(\nu) d\rho(\nu) = h_\varsigma(\mu).$$

∎

定理 3.3 と圧力の定義より、圧力の $\mathcal{K}$ を用いた表示式が得られる。

定理 3.4 $\psi \in USC(S),\ \inf \psi > -\infty$ とする。このとき、ψ の圧力は次のように表すことができる：

$$p(\psi) = \sup_{\mu \in M(S,\varsigma)} \mu(\mathcal{K} + \psi).$$

特に、位相エントロピーは $\sup_{\mu\in M(S,\varsigma)} \mu(\mathcal{K})$ である。$\mu \in M(S, \varsigma)$ が ψ に対する平衡状態であるとすると、

$$p(\psi) = \mu(\mathcal{K} + \psi)$$

が成り立つ。

例 3.5（d 次元 Ising モデル） $d \in \mathbb{N}$、$\Sigma := \{+1, -1\}$ とする。ここで、Σ の元 $+1, -1$ は、それぞれ $G := \mathbb{Z}^d$ 上の「格子気体」の各点における「上向きスピン」、「下向きスピン」を表している。$\Omega := \Sigma^G$ を配位空間、$\mathcal{T}$ を Ω 上の G のシフト作用とする。d 次元 Ising モデルに対して、局所エネルギー関数 $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$\psi(\omega) := -\beta \left(-\sum_{j=1}^{d} (\omega_{\mathbf{0}}\omega_{e_j} + \omega_{\mathbf{0}}\omega_{-e_j}) - B\omega_{\mathbf{0}} \right), \quad \omega \in \Omega.$$

ここで、$\mathbf{0} := (0, \cdots, 0), e_j := (0, \cdots, \overset{j\text{th}}{1}, \cdots, 0) \in G$ であり、$-\sum_{j=1}^{d}(\omega_{\mathbf{0}}\omega_{e_j} + \omega_{\mathbf{0}}\omega_{-e_j})$ は隣接スピン間の相互作用、$-B\omega_{\mathbf{0}}$ は格子点 $\mathbf{0}$ のスピン上の磁場 $B \in \mathbb{R}$ の効果、$\beta \geq 0$ は逆温度をそれぞれ表す。ψ に対する平衡状態 μ が存在し、定理 3.4 を用いるとこの μ に対して圧力は $p(\psi) = \mu(\mathcal{K} + \psi)$ となる。

参考文献

[1] Benci, V., Bonanno, C., Galatolo, S., Menconi, G., Virgilio, M.: Dynamical systems and computable information. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **4**, 935–960 (2004)

[2] Brudno, A.A.: Entropy and the complexity of the trajectories of a dynamical system. Trans. Mosc. Math. Soc. **2**, 127–151 (1983)

[3] Fuda, T., Tonozaki, M.: Brudno's theorem for $\mathbb{Z}^d$ ($\mathbb{Z}^d_+$) subshifts. arXiv:1508.05506.

[4] Keller, G.: Equilibrium States in Ergodic Theory. Cambridge University Press (1998)

[5] Li, M., Vitányi, P.: An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications, 3rd edn. Springer (2008)

[6] Ornstein, D., Weiss, B.: The Shannon-McMillan-Breiman theorem for a class of amenable groups. Israel J. Math. **44**, 53–60 (1983)

[7] Pollicott, M., Yuri, M.: Dynamical Systems and Ergodic Theory. Cambridge University Press (1998)

[8] Simpson, S.G.: Symbolic Dynamics: Entropy = Dimension = Complexity. Theory Comput. Syst. **56**, 527–543 (2015)

[9] Walters, P.: An Introduction to Ergodic Theory. Springer (1982)