ジェネリックなベクトル場の生成系における一般化されたサブリーマン多様体上の異常測地線の性質について

行野 亘 (ゆくの わたる)*
北海道大学理学院数学専攻

0　はじめに

サブリーマン多様体とは, C^∞ 多様体と, その多様体の接束の部分束 (接分布) と，その上のリーマン計量の 3 つ組のことである。このサブリーマン多様体では, 2 点を結ぶ最短測地線はリーマン多様体の場合とは異なり, 驚くべきことに, 計量によらず接分布のみから決まる測地線 (異常測地線) が存在することがある。実際, Montgomery は [M] で異常極値的曲線であり, かつ, 最短測地線であるような例を具体的に構成した。さらに, 数人の著者が "サブリーマン多様体において異常極値的曲線は最短測地線になることはない" という誤った結果を書いていたので, いくつかの誤った証明が書かれた論文のリストを Montgomery は [M] で提示した。このことが, Agrachev, Sarychev [AS] や Liu, Sussmann [LS] などの多くの研究者に影響を与えた。

その後, Belláiche は [B] でサブリーマン多様体の概念を一般化した。この一般化されたサブリーマン多様体は, ベクトル場の系が必ずしも多様体上至るところで一次独立と限らない場合でも定義することができる。もし, ベクトル場が多様体上至るところで一次独立の場合, その系は多様体の接束の部分束を生成し, 一般化されたサブリーマン計量は "通常の意味の" サブリーマン計量と一致する。

本ポスターセッションでは, 一般化されたサブリーマン多様体上で, 異常極値的曲線について考え, 得られた結果について紹介する。

以後, 特に断りのない限り, M を n 次元 C^∞ 多様体とし, M 上の点 x における M の接空間を T_xM で表し, また, M の接束を TM で表すものとする。すなわち, $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ とする。$X = (X_1, \cdots, X_m)$ を, M 上の m 個のベクトル場の系とする。

1　一般化されたサブリーマン計量

与えられた点 $x \in M$ に対して, $L_x \subset T_xM$ を, $X_1(x), \cdots, X_m(x)$ で生成される $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。すなわち, $L_x = \langle X_1(x), \cdots, X_m(x)\rangle_{\mathbb{R}}$ とする。

定義 1.1. $L \subset TM$ を $L = \bigcup_{x\in M} L_x$ とする。そのとき, $g : L \to \mathbb{R}$ が**一般化されたサブリーマン計量 (generalized Sub-Riemannian metric)** であるとは, 以下の条件を満たすことである:

*yukuwata@math.sci.hokudai.ac.jp

$$g(w) = g(x,v) = \min\left\{(u_1)^2 + \cdots + (u_m)^2 \middle| \; v = u_1X_1(x) + \cdots + u_mX_m(x)\right\}.$$

ここで, $w = (x,v)$ は $L \subset TM$ の自然な座標である: $x \in M$, $v \in L_x$.

Remark $M \ni x$ に対して, 線形写像 $\sigma_x : \mathbb{R}^m \to L_x$ を, $\sigma(u) = u_1X_1(x) + \cdots + u_mX_m(x), u = (u_1, \cdots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ によって定義する。そのとき, σ_x の, $\mathbb{R}^m$ における $\mathrm{Ker}(\sigma_x)$ の直交補空間 $\mathrm{Ker}(\sigma_x)^\perp$ への制限 $\sigma|_{\mathrm{Ker}(\sigma)^\perp}$ は線形同型写像になり, その逆写像 $(\sigma|_{\mathrm{Ker}(\sigma)^\perp})^{-1} : L_x \to \mathrm{Ker}(\sigma_x)^\perp$ を利用することにより, 一般化されたサブリーマン計量 g は, $g(w) = g(x,v) = ||(\sigma|_{\mathrm{Ker}(\sigma)^\perp})^{-1}(w)||^2$, $w = (x,v) \in L$ と表される。

Remark もし $X = (X_1, \cdots, X_m)$ が M 上一次独立ならば, $L \subset TM$ は TM の部分束になり, L は TM の m 次元**分布 (distribution)** と呼ばれる。このとき, $g : L \to \mathbb{R}$ は標準内積になるので, 3 つ組 (M, L, g) は "通常の意味の" サブリーマン多様体に一致する。

定義 1.2. 絶対連続な曲線 $x : [0,T] \to M$ が X-**許容的曲線 (admissible curve)** であるとは, 殆ど至るところの点 $x \in M$ に対して, $\dot{x}(t) \in L_{x(t)}$ であるときに言う。このとき, $d_{CC} : M \times M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が**一般化されたカルノー・カラテオドリ (Carnot-Carethéodry) 距離**であることを次で定義する: 任意の 2 点 $p, q \in M$ に対して,

$$d_{CC}(p,q) = \inf\left\{\int_{[0,T]} \sqrt{g(x(t),\dot{x}(t))}dt \;\middle|\; \begin{array}{l} x : [0,T] \to M : X\text{-許容的曲線} \\ x(0) = p,\ x(T) = q \end{array}\right\}.$$

Remark もし $X = (X_1, \cdots, X_m)$ が一次独立ならば, 全ての X-許容的曲線 $x : [0,T] \to M$ に対して, 唯一つの L^∞ (可測, かつ, 本質的有界) 曲線 $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ が存在して, 次の条件 $(\star)$ を満たす:

$$\dot{x}(t) = u_1(t)X_1(x(t)) + \cdots + u_m(t)X_m(x(t)) \cdots (\star).$$

$X = (X_1, \cdots, X_m)$ が一次独立とは限らない場合は, 一意ではないが, 条件 $(\star)$ を満たすような L^∞ 曲線 $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ が存在する。この曲線 u を, x の X-**許容制御 (admissible control)** と呼ぶ。このとき,

$$\int_{[0,T]} \sqrt{g(x(t),\dot{x}(t))}dt = \int_{[0,T]} \sqrt{u_1(t)^2 + \cdots + u_m(t)^2}dt.$$

が成り立ち, $\int_{[0,T]} \sqrt{g(x(t),\dot{x}(t))}dt$ を, X-許容的曲線 x の**長さ**と呼ぶ。

定義 1.4. X-許容的曲線 $x : [0,T] \to M$ が**最短測地線 (minimizing geodesic)** あるいは**最短曲線 (minimizer)** であるとは, 次の条件を満たすときを言う:

$$d_{CC}(x(0), x(T)) = \int_{[0,T]} \sqrt{g(x(t),\dot{x}(t))}dt.$$

2 最適制御問題

$\mathcal{U}^T_{x_0,x_1} \subset L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m)$ を初期点 $x_0 \in M$ と終点 $x_1 \in M$ を固定した X-許容的曲線 $x : [0,T] \to M, x(0) = x_0, x(T) = x_1$ を持つような X-許容制御全体とする。エネルギー汎関数 $C : \mathcal{U}^T_{x_0,x_1} \to \mathbb{R}$ を,

$$C(u) = \int_{[0,T]} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} u_i(t)^2 dt,\ u \in \mathcal{U}_{x_0,x_1}^T$$

で定義し, $C(u)$ を最小にする最適制御問題を考える。ここで, X-許容制御 $u^* : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ が**最適制御 (optimal control, minimal control)** であるとは, 全ての X-許容制御 $u \in \mathcal{U}_{x_0,x_1}^T$ に対して, $C(u^*) \leqq C(u)$ であるときを言う。

Remark この問題は, Cauchy-Schwart の不等式によって, 長さ $\ell : \mathcal{U}_{x_0,x_1}^T \to \mathbb{R}$ を最小化する問題と同値であるが知られている:

$$\ell(u) = \int_{[0,T]} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_i(t)^2} dt,\ u \in \mathcal{U}_{x_0,x_1}^T.$$

この最適制御問題における**ハミルトン (Hamilton) 関数** $H : (T^*M \times \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を, $(z; u; p_0) = (x, p; u; p_0) \in (T^*M \times \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}$ に対して, 次で定義する:

$$H(x, p; u; p_0) = \sum_{i=1}^{m} u_i \langle p, X_i(x) \rangle + p_0 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} u_i^2\right).$$

ここで, (x, p, u) は, T^*M の正準座標 (x, p) を持つ, $T^*M \times \mathbb{R}^m$ の局所座標である。このとき, **ポントリャーギン (Pontryagin) の最大値原理**を利用することにより, 次が成り立つ。

定理 2.1. $x_0, x_1 \in M$ とする。$u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ を X-許容制御し, $x : [0,T] \to M$ を $x(0) = x_0, x(T) = x_1$ を満たす X-許容的曲線とする。そのとき, もし u が最適制御, つまり, x が最短測地線ならば, ある絶対連続な曲線 $z : [0,T] \to T^*M$ と, 実数 $p_0 \leqq 0$ の組 (z, p_0) が存在して, $x = \pi \circ z$ と z は以下の方程式 $(\star\star)$ を満たす。T^*M の正準座標が (x, p) であるような, $T^*M \times \mathbb{R}^m$ の任意の局所座標 $(x, p; u) = (x_1, \cdots, x_n, p_1 \cdots, p_n; u_1, \cdots, u_m)$ に対して,

$$(\star\star) : \begin{cases} (1)\ \dot{x}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x(t), p(t), u(t)\,;\, p_0)\ (1 \leqq i \leqq n) & \text{for a.e. } t \in [0,T] \\ (2)\ \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x(t), p(t); u(t)\,;\, p_0)\ (1 \leqq i \leqq n) & \text{for a.e. } t \in [0,T] \\ (3)\ \frac{\partial H}{\partial u_j}(x(t), p(t); u(t)\,;\, p_0) = 0\ (1 \leqq j \leqq m) & \text{for a.e. } t \in [0,T] \\ (4)\ (p(t), p_0) \neq 0. & \text{for every } t \in [0,T] \end{cases}.$$

ここで, $\pi : T^*M \to M$ は自然な射影とする。

定義 2.2. $z : [0,T] \to T^*M$ が**正常 X-陪極値的曲線 (normal X-bi-extremal)** であるとは, $p_0 < 0$ であるときを言う。$x : [0,T] \to M$ が**正常 X-極値的曲線 (normal X-extremal)** であるとは, 正常 X-陪極値的曲線を持つときを言う。一方, $z : [0,T] \to T^*M$ が**異常 X-陪極値的曲線 (abnormal X-bi-extremal)** であるとは, $p_0 = 0$ であるときを言う。$x : [0,T] \to M$ が**正常 X-極値的曲線 (abnormal X-extremal)** であるとは, 異常 X-陪極値的曲線を持つときを言う。

Remark このハミルトン関数の定式化は "通常の意味での" サブリーマン幾何における X-正常陪極値的曲線のハミルトン形式と一致する。

定義 2.3. X-異常極値的曲線 $x:[0,T]\to M$ が**強異常 (strictly abnormal)** であるとは, 正常 X-陪極値的曲線の射影でないときを言う。

Remark 極値的曲線 $x:[0,T]\to M$ の中には, 正常かつ異常なものも存在することが起こり得る。また, Montgomery [M] , Kupka, や Liu, Sussmann [LS] などによって, 強異常であって, 最短測地線である例が与えられている。

3 主結果

$\mathrm{VF}(M)^m$ を n 次元 C^∞ 多様体 M 上の m 個の C^∞ ベクトル場の組からなる空間とし, $\mathrm{VF}(M)^m$ にはホイットニー C^∞ 位相が入っているものとする。

先行結果 [CJT08] $2\leqq m\leqq n$ と仮定する。そのとき, $\mathrm{VF}(M)^m$ の開かつ稠密な部分集合 G が存在して, もし, $X=(X_1,\cdots,X_m)$ が G に含まれ, $x:[0,T]\to M$ が初期点 $x_0\in M$ と終点 $x_1\in M$ に関する非自明な X-異常極値的曲線ならば, x は必ず強異常である。

$\boldsymbol{D}=(d_1,\cdots,d_m)$ を m 個の整数の組とし, $\mathrm{VF}^{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{poly}}(\mathbb{R}^n)$ を, 各 $i\,(1\leqq i\leqq m)$ に対して, $\mathbb{R}^n$ 上の多項式ベクトル場 Q_i の次数が d_i 以下であるような $Q=(Q_1,\cdots,Q_m)$ 全体とする。$\mathrm{VF}^{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{poly}}(\mathbb{R}^n)$ には, 通常のユークリッド位相が入っているものとする。

主結果 ([Y]) $2\leqq m\leqq n$ とする。$\boldsymbol{D}=(d_1,\cdots,d_m)$ が不等式 "$\min\{d_1,\cdots,d_m\}\geqq 3n+2$" を満たしていると仮定する。そのとき, $\mathrm{VF}^{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{poly}}(\mathbb{R}^n)$ の開かつ稠密な部分集合 H が存在して, もし, $Q=(Q_1,\cdots,Q_m)$ が H に含まれ, $x:[0,T]\to M$ が初期点 $x_0\in M$ と終点 $x_1\in M$ に関する非自明な Q-異常極値的曲線ならば, x は必ず強異常である。

参考文献

[AS] A.Agrachev, A.Sarychev, *Abnormal sub-Riemannian geodesics: Morse index and rigidity*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13, 1996.

[B] A.Bellïaiche, *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, in Sub-Riemannian Geometry, Progress in Math. 144, Birkhäuser, pp. 1-78, (1996).

[CJT08] Y.Chitour, F.Jean, and E.Trélat, *Singular trajectories of control-affine systems*, SIAM J.Control Optim.,Vol.47, No.2 (2008), pp.1078-1095.

[LS] W.S.Liu, H.J.Sussmann, *Shortest paths for sub-Riemannian metrics of rank two distributions*, Memoirs AMS 118, no.564, 1995.

[M] R.Montgomery, *Abnormal Minimizers*, SIAM J.Control and Optim. Vol.32, No.6 (1994), pp.1605-1620.

[Y] W.Yukuno, *Abnormal geodesics in generalized subriemannian geometry*, Ph.D.thesis, Hokkaido University, (2014).