波束変換を用いた散乱理論の展開*

米山　泰祐
東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士１年

E-mail: t.yoneyama226@gmail.com

1　導入

本研究では, 次の Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u - V(t,x)u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(t_0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, V に「短距離型」と呼ばれる以下の仮定をする.

仮定 (A). $V(t,x)$ は $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上の可測な実数値関数で, ある $\delta > 1$ があって

$$|V(t,x)| \le C(1+|x|)^{-\delta}, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

となる $C > 0$ が存在する.

上記の仮定のもとでは, $u(t_0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ から (1) の解 $u(t) \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ への対応は一意に定まる (K. Kobayasi [6] 参照) ので, 写像 $u_0 \mapsto u(t)$ を $U(t,t_0)$ と書き, (1) に対する発展作用素と呼ぶ. また, 自由 Schrödinger 作用素を $e^{\frac{1}{2}it\Delta}$ とする. これらの作用素を用いて波動作用素を定義する.

定義 1. (波動作用素) 次の式の右辺の強極限が存在するとき,

$$W_\pm = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} U(0,t)e^{\frac{1}{2}it\Delta}$$

とおき, $W_\pm$ を波動作用素と呼ぶ.

本研究では以下のことを示すことができた.

定理 1. (A) を仮定する. このとき, 任意の $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し, $L^2(\mathbb{R}^n)$ での $t \to \pm\infty$ のときの

$$U(0,t)e^{\frac{1}{2}it\Delta}u_0$$

の極限が存在する. すなわち, 波動作用素 $W_\pm$ が存在する.

*本研究は指導教員である加藤 圭一先生との共同研究に基づくものである

本研究では, 時間に依存するポテンシャルをもつSchrödinger 方程式に対する波動作用素の存在および完全性について波束変換という変換を用いて考える. ポテンシャルが時間に依存しない場合は, 古くから [1], [7] などにより波動作用素の存在が示されている (Cook-Kuroda の方法). V. Enss [2] は古典軌道の振る舞いを考えることにより, 波動作用素の存在に対する別の証明を与えた. その後, D. R. Yafaev [8] は時間に依存するポテンシャルに対しての波動作用素の存在および完全性を示した. 本研究では波束変換を用いて, 発展作用素を積分方程式で表し, それらを評価していくことで, 時間に依存するポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式に対する波動作用素の存在を示し, D. R. Yafaev の結果 [8] に対する別証明を与える. また, 本研究では短距離型の条件 ($\delta > 1$) を仮定しているが, $0 < \delta \leq 1$ のときは上記の波動作用素は存在しないことが知られている. しかし, $e^{\frac{1}{2}it\Delta}$ の部分を適当に修正した修正波動作用素の存在が H. Kitada–K. Yajima [5] により示されている.

2 波束変換

本研究の証明で用いる波束変換についての性質を述べる.

定義 2. (Wave packet transform)
$\varphi \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ とする. このとき $f \in \mathcal{S}'$ に対し, φ から定まる波束変換 $W_\varphi f(x,\xi)$ を

$$W_\varphi f(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

で定める.

波束変換には次のような性質が成り立つ.

命題 1. $\varphi \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'$ とする. このとき次が成立する.
(i)$W_\varphi f(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.
(ii)u, φ が t にも依存する場合

$$\begin{aligned} W_{\varphi(t)}[\partial_x f](t,x,\xi) &= -i\xi W_{\varphi(t)}[f](t,x,\xi) + W_{\partial_x \varphi(t)}[f](t,x,\xi), \text{ in } \mathcal{S}', \\ W_{\varphi(t)}[\partial_t f](t,x,\xi) &= \partial_t W_{\varphi(t)}[f](t,x,\xi) - W_{\partial_t \varphi(t)}[f](t,x,\xi), \text{ in } \mathcal{S}'. \end{aligned}$$

(iii)$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ならば, $W_\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ であり,

$$\begin{aligned} (W_\varphi f, W_\psi g)_{L^2(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)} &= \overline{(\varphi,\psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)}} (f,g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= (\psi,\varphi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} (f,g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. [3] 参照. □

3　証明のアイデア

本研究では, K. Kato – M. Kobayashi – S. Ito [4] と同様に φ を時間発展させることにより, 証明を行う. 以降, $\varphi_0 \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする.

$\varphi(t) = e^{\frac{1}{2}i(t-t_0)\Delta}\varphi_0$ に対し, (1) を波束変換する. 命題 1 より, 部分積分や積の微分を用いることで

$$\begin{aligned}
W_{\varphi(t)}[\Delta u](t,x,\xi) &= \int \overline{\varphi(t,y-x)}\Delta u(y)e^{-iy\xi}dy \\
&= \int \Delta\overline{\varphi(t,y-x)}u(y)e^{-iy\xi}dy \\
&+ \int (-2i\xi\cdot\nabla_y)\overline{\varphi(t,y-x)}u(y)e^{-iy\xi}dy - |\xi|^2\int \overline{\varphi(t,y-x)}u(y)e^{-iy\xi}dy \\
&= W_{\Delta\varphi(t)}u(t,x,\xi) + 2i\xi\cdot\nabla_x W_{\varphi(t)}u(t,x,\xi) - |\xi|^2 W_{\varphi(t)}u(t,x,\xi).
\end{aligned}$$

$W_{\varphi(t)}[\partial_t u](t,x,\xi) = i\partial_t W_{\varphi(t)}u(t,x,\xi) + W_{i\partial_t\varphi(t)}u(t,x,\xi)$ であるから,

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(i\partial_t + i\xi\cdot\nabla_x - \frac{1}{2}|\xi|^2\right)W_{\varphi(t)}u(t,x,\xi) = W_{\varphi(t)}[V(t)u](t,x,\xi), \\ W_{\varphi_0}u(0,x,\xi) = W_{\varphi_0}u_0(x,\xi). \end{cases}$$

と変換できる. (2) の右辺を非斉次項と見なし, 特性曲線の方法を用いると,

$$\begin{aligned}
W_{\varphi(t)}[U(t,0)u_0](t,x,\xi) &= e^{-i\frac{1}{2}t|\xi|^2}W_{\varphi_0}u_0(x-t\xi,\xi) \\
&\quad - i\int_0^t e^{-i\frac{1}{2}(t-s)|\xi|^2}W_{\varphi(s)}[V(s)u](s,x-(t-s)\xi,\xi)ds
\end{aligned}$$

と表せる. 一方, 自由 Schrödinger 作用素を波束変換したものは

$$W_{\varphi(t)}[e^{-\frac{1}{2}it\Delta}u_0](t,x,\xi) = e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}W_{\varphi_0}u_0(x+t\xi,\xi)$$

と表せる.

このとき, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\begin{aligned}
(U(0,t)e^{it\Delta}u_0,\psi) &= (u_0, e^{-it\Delta}U(t,0)\psi) \\
&= C_{\Phi,\varphi_0}(W_\Phi u_0, W_{\varphi_0}[e^{-it\Delta}U(t,0)\psi])
\end{aligned}$$

と変形し, 上の２式を用いると

$$\begin{aligned}
W_{\varphi_0}[e^{-it\Delta}U(t,0)\psi](x,\xi) &= e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}W_{\varphi(t)}[U(t,0)\psi](x+t\xi,\xi) \\
&= W_{\varphi_0}\psi(x,\xi) - i\int_0^t e^{i\frac{1}{2}s|\xi|^2}W_{\varphi(s)}[V(s)\psi](s,x+s\xi,\xi)ds.
\end{aligned}$$

第１項は t に依っていないので, u_0, φ_0 をうまく取ることによって, 第２項の可積分性を導く. これにより波動作用素の存在が示せる. 可積分性を導く際, 粒子の古典軌道を考え, それに沿う部分と沿わない部分に分けて議論する必要があるが, 波束変換によって変換された関数は相空間 ($x-\xi$ 空間) 上の関数となるので, その場合分けを容易に行えるのが本研究の特徴である.

参考文献

[1] J. Cook, Convergence to the Møller wave matrix. J. math. Phys. 36 (1957), 82–87.

[2] V. Enss, Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering, Commun. Math. Phys. 61 (1978), 285–291.

[3] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier transform and its applications. Tohoku Math. J. (2) 64 (2012), no. 2, 223–231.

[4] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Remark on wave front sets of solutions to Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator, SUT Journal of Mathematics Vol. 47, No. 2 (2011), 175–183.

[5] H. Kitada, K. Yajima, A scattering theory for time-dependent long-range potentials, Duke Math. J. 49, (1982), 341–376.

[6] K. Kobayasi, On a theorem for a linear evolution equation of hyperbolic type, J. Math. Soc. Japan 31 (1979), 647–654.

[7] S. Kuroda, On the existence and the unitary property of the scattering operator. Nuovo Cimento, X. Ser. 12 (1959), 431–454.

[8] D. R. Yafaev, On the violation of unitarity in time-dependent potential scattering, Soviet Math. Dokl. 19 (1978), 1517–1521 (English trans, from Russian).