Del Pezzo 曲面上の ACM 曲線の極小自由分解について

矢城 信吾 †

九州大学

概要

このポスターセッションでは，Del Pezzo 曲面上の ACM 曲線の分類と，ACM 曲線の極小自由分解について考察した結果について述べる．今回，このような機会を与えてくださった第１１回 MCYR 運営委員会のみなさまに深く感謝いたします．

1 はじめに

Del Pezzo 曲面とは，非特異射影曲面で反標準因子 $-K_X$ が very ample であるような曲面をいう．このような曲面は

1. $\mathbb{P}^2$ 上の r 点ブローアップ $(0 \leq r \leq 6)$ の $\mathbb{P}^{9-r}$ への埋め込み，または
2. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の Segre 埋め込み $\sigma_{2,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^8$

に同型である．このような曲面については，幾何学的な観点からは古典的によく調べられてきた（[5]）．さらに分類という立場では，Δ 種数 1 の射影多様体の分類という立場で行われていた ([3])．一方で，代数学的観点（特に極小自由分解の立場）からは，１９９０年代に $\deg X = \operatorname{codim} X + 2$ となる射影多様体の極小自由分解による考察が進んでいた ([7],[6])．今回，これらの曲面の中で Arithmetically Cohen-Macaulay であるような因子の型を決定し，それらの分類を行った．さらに，得られた因子の極小自由分解を求めた．それらの一例を紹介させていただく．以下，k を標数 0 の代数的閉体とする．

Theorem 1.1. X を $\mathbb{P}^{9-r}$ 内の $9-r$ 次の *Del Pezzo* 曲面 $(0 \leq r \leq 6)$，$\mathcal{L}$ を X 上の $(a; b_1, \ldots, b_r)$ 型の可逆層 $(a, b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{Z}, b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_r)$ とし，$\bar{\mathcal{I}} = \mathcal{L}^{-1}$ を X 上のイデアル層とする．このとき，任意の整数 n に対して，$H^1(X, \bar{\mathcal{I}}(n)) = 0$ であるのは，次の表 *1* の型となるのが必要十分条件である．ただし，$X = \sigma_{2,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^8$ のときは，$\mathcal{L}$ の型を (a, b) $(a \geq b)$ とする．

Remark 1.2. $r = 6$ の場合について (i.e. すなわち $\mathbb{P}^3$ 内の非特異 3 次曲面上の ACM な可逆層) は [8]，$X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ であるときの結果は [4] などを参照してください．

$r=6$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$	$r=5$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$
$(A_{6,1})$	$(3m; m, m, m, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{5,1})$	$(3m; m, m, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{6,2})$	$(3m; m+1, m, m, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{5,2})$	$(3m; m+1, m, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{6,3})$	$(3m; m, m, m, m, m, m-1)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{5,3})$	$(3m; m, m, m, m, m-1)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{6,4})$	$(3m; m+1, m, m, m, m, m-1)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{5,4})$	$(3m; m+1, m, m, m, m-1)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{6,1})$	$(3m+1; m, m, m, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{5,1})$	$(3m+1; m, m, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{6,2})$	$(3m+1; m+1, m, m, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{5,2})$	$(3m+1; m+1, m, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{6,3})$	$(3m+1; m+1, m+1, m, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{5,3})$	$(3m+1; m+1, m+1, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{6,4})$	$(3m+1; m+1, m+1, m+1, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{5,4})$	$(3m+1; m+1, m+1, m+1, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{6,1})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m+1, m+1, m+1)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{5,1})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m+1, m+1)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{6,2})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m+1, m+1, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{5,2})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m+1, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{6,3})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m+1, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{5,3})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{6,4})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{5,4})$	$(3m+2; m+1, m+1, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$

$r=4$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$	$r=3$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$
$(A_{4,1})$	$(3m; m, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{3,1})$	$(3m; m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{4,2})$	$(3m; m+1, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{3,2})$	$(3m; m+1, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{4,3})$	$(3m; m, m, m, m-1)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{3,3})$	$(3m; m, m, m-1)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{4,4})$	$(3m; m+1, m, m, m-1)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{3,4})$	$(3m; m+1, m, m-1)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{4,1})$	$(3m+1; m, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{3,1})$	$(3m+1; m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{4,2})$	$(3m+1; m+1, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{3,2})$	$(3m+1; m+1, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{4,3})$	$(3m+1; m+1, m+1, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{3,3})$	$(3m+1; m+1, m+1, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{4,4})$	$(3m+1; m+1, m+1, m+1, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{3,4})$	$(3m+1; m+1, m+1, m+1)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{4,1})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m+1)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{3,1})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{4,2})$	$(3m+2; m+1, m+1, m+1, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{3,2})$	$(3m+2; m+1, m+1, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{4,3})$	$(3m+2; m+1, m+1, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{3,3})$	$(3m+2; m+1, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{4,4})$	$(3m+2; m+1, m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{3,4})$	$(3m+2; m, m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$

$r=2$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$	$r=1$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$
$(A_{2,1})$	$(3m; m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{1,1})$	$(3m; m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{2,2})$	$(3m; m+1, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{1,2})$	$(3m; m+1)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{2,3})$	$(3m; m, m-1)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(A_{1,3})$	$(3m; m-1)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(A_{2,4})$	$(3m; m+1, m-1)\ (m \in \mathbb{Z})$		
$(B_{2,1})$	$(3m+1; m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{1,1})$	$(3m+1; m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{2,2})$	$(3m+1; m+1, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(B_{1,2})$	$(3m+1; m+1)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{2,3})$	$(3m+1; m+1, m+1)\ (m \in \mathbb{Z})$		
$(C_{2,1})$	$(3m+2; m+1, m+1)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{1,1})$	$(3m+2; m+1)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{2,2})$	$(3m+2; m+1, m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(C_{1,2})$	$(3m+2; m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{2,3})$	$(3m+2; m, m)\ (m \in \mathbb{Z})$		

$r=0$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$	$X=\sigma_{2,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$	the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$
$(A_{0,1})$	$(3m)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(D_{0,1})$	$(2m, 2m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(B_{0,1})$	$(3m+1)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(E_{0,1})$	$(2m+1, 2m)\ (m \in \mathbb{Z})$
$(C_{0,1})$	$(3m+2)\ (m \in \mathbb{Z})$	$(F_{0,1})$	$(2m+1, 2m+1)\ (m \in \mathbb{Z})$

表 1　ACM な可逆層の型

これらの型に分類することによって，Del Pezzo 曲面上の ACM 曲線の極小自由分解を構成する．まず，Del Pezzo 曲面の極小自由分解は次のようにかける．

Theorem 1.3. [6] X を $\mathbb{P}^n$ 内の非退化な部分多様体で，$\dim X \geq 2$ かつ $\deg X = \operatorname{codim} X + 2$ とする．X が *ACM* な射影多様体であるとき，X の極小自由分解は次のようになる．

$$0 \to S(-p-2) \to S(-p)^{\alpha_{p-1}} \to S(-(p-1))^{\alpha_{p-2}} \to \cdots \to S(-2)^{\alpha_1} \to S \to S_X \to 0.$$

ただし，

$$\alpha_i = i\binom{p}{i+1}_0 - \binom{p}{i-1}_0 \quad (\textit{for } 1 \leq i \leq p-1)$$

であり，p は S_X の射影次元とする．

Del Pezzo 曲面は ACM 多様体であり，$\deg X = \operatorname{codim} X + 2$ を満たす非退化非特異射影曲面であるから，定理 1.3 が適用できる．

Theorem 1.4. (Mapping Cone [1],[2]) $\mathbf{F}_\bullet, \mathbf{G}_\bullet$ を複体とし，$\phi_i : F_i \to F_{i-1}, \psi_i : G_i \to G_{i-1}$ を *chain map* とする．$\gamma : F \to G$ とするとき複体 $\mathbf{H}_\bullet$ は次のように定義できる．

$$H_i := F_i \oplus G_{i+1}$$

とし，

$$\delta_i = \begin{pmatrix} -\phi_i & 0 \\ \gamma_i & \psi_{i+1} \end{pmatrix} : H_i \to H_{i-1}$$

この結果を用いて，$\bar{I}_C \subseteq S_X$ を S 加群として考え，極小自由分解 $\mathbf{F}_\bullet$ を構成する．次に，Del Pezzo 曲面 X 上の極小自由分解を $\mathbf{G}_\bullet$ とすることで，S_C の極小自由分解 $\mathbf{H}_\bullet$ を構成できる。

Example 1.5. X を $\mathbb{P}^{9-r}$ 内の $9-r$ 次 *Del Pezzo* 曲面とし，C を X 上の $A_{r,1}$ 型の因子とする．$I_C \subseteq S = k[x_0, \ldots, x_{9-r}]$ としたとき，$S_C = S/I_C$ の極小自由分解は次のようになる．

1. $r = 6$ のとき

$$0 \to S(-(m+3)) \to S(-3) \oplus S(-m) \to S \to S_C \to 0..$$

ただし，$m \geq 1$ である．

2. $0 \leq r \leq 5$ のとき

$$\begin{array}{rcl}
0 \longrightarrow & S(-(m+2)) & \\
\longrightarrow & S(-(p+2)) \oplus S(-(m+p))^{\alpha_{p-1}} & \\
\longrightarrow & S(-p)^{\alpha_{p-1}} \oplus S(-(m+p-1))^{\alpha_{p-2}} & \\
\longrightarrow & S(-(p-1))^{\alpha_{p-2}} \oplus S(-(m+p-2))^{\alpha_{p-3}} & \\
& \vdots & \\
\longrightarrow & S(-3)^{\alpha_2} \oplus S(-(m+2))^{\alpha_1} & \\
\longrightarrow & S(-2)^{\alpha_1} \oplus S(-m) & \\
\longrightarrow & S & \\
\longrightarrow & S_C & \longrightarrow 0.
\end{array}$$

ただし，$m \geq 1$ である．

参考文献

[1] D. Eisenbud. *Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.

[2] D. Eisenbud. *The Geometry of Syzygies: A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2005.

[3] T. Fujita. *Classification Theory of Polarized Varieties.* Lecture note series. Cambridge University Press, 1990.

[4] Salvatore Giuffrida and Renato Maggioni. On the resolution of a curve lying on a smooth cubic surface in $\mathbb{P}^3$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 331(1):181–201, 1992.

[5] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Encyclopaedia of mathematical sciences. Springer, 1977.

[6] Le Tuan Hoa. On minimal free resolutions of projective varieties of degree = codimension +2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 87(3):241–250, 1993.

[7] Le Tuan Hoa, Jürgen Stückrad, and Wolfgang Vogel. Towards a structure theory for projective varieties of degree = codimension +2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 71(2):203–231, 1991.

[8] Masayuki WATANABE. On projective normality of space curves on a non-singular cubic surface in $\mathbf{P}^3$. *Tokyo Journal of Mathematics*, 04(2):331–341, 12 1981.