

消散型波動方程式における Strichartz 型評価とその応用

広島大学理学研究科 渡辺 朋成*

1 序

次の非斉次偏微分方程式を考える.

$$(DW) \quad \partial_t^2 u(t, x) - \Delta u(t, x) + \partial_t u(t, x) = h(t, x)$$

ここで $u(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数, h は既知関数であり, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_j^2$ である. 方程式 (DW) を消散型波動方程式と呼ぶ.

消散型波動方程式は波動現象を表す波動方程式 $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ に, 消散 (摩擦) の効果をあらわす消散項 $\partial_t u$ を加えたものとみなすことができ, 摩擦のある弦の振動や, ケーブルを使った信号の伝播などを表現することが知られている. 物理的には消散項として, 速度を変数とする正值関数 $B(\partial_t u) \geq 0$ を採用した

$$\partial_t^2 u(t, x) - \Delta u(t, x) + B(\partial_t u) = h(t, x)$$

を消散型波動方程式と呼ぶほうが一般的である. 実際に様々な形の消散項 $B(\partial_t u)$ についての研究の存在するが, ここでは最も簡単な線形の場合 $B(\partial_t u) = \partial_t u$ を考えることにする.

2 Fourier 変換と Sobolev 空間

現在の偏微分方程式の解析において, Fourier 変換 (周波数表示) は重要な方法として用いられている. ここでは Fourier 変換を用いて, 消散型波動方程式 (DW) の解を求めることを目指す.

*email:watanabe-to@hiroshima-u.ac.jp

定義 1 (Fourier 変換). *Fourier* 変換 \mathcal{F} と *Fourier* 逆変換 \mathcal{F}^{-1} を次で定める.

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad (1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} g(\xi) d\xi. \quad (2)$$

ここで $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ である.

Fourier 変換の有用な点として, “都合の良い” 性質を持つ関数 f に対しては, 次の事実が成立することが挙げられる.

事実 1.

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f.$$

事実 2.

$$\xi_j \mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[-i\partial_j f](\xi) \quad (j = 1, 2, \dots, d), \quad \text{特に} \quad \mathcal{F}[-\Delta f] = |\xi|^2 \mathcal{F}[f].$$

事実 1 は, \mathcal{F} の逆写像は \mathcal{F}^{-1} であることを意味する. 一方事実 2 は, \mathbb{R}_x^d における微分という操作が, \mathbb{R}_ξ^d では多項式を掛けるという操作に対応することを意味する. これらの事実を用いると, いくつかの線形偏微分方程式を (形式的に) 解くことができる.

例 1 (熱方程式).

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) - \Delta v(t, x) = 0, \\ v(0, x) = v_0(x) \end{cases}$$

の解は

$$v(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{t|\xi|^2} \mathcal{F}[v_0] \right] (x) =: (e^{-t\Delta} v_0)(x).$$

例 2 (波動方程式).

$$\begin{cases} \partial_t^2 w(t, x) - \Delta w(t, x) = h(t, x) \\ (w(0, x), \partial_t w(0, x)) = (w_0(x), w_1(x)) \end{cases}$$

の解は

$$w(t) = \cos(t|D|)w_0 + \frac{\sin(t|D|)}{|D|}w_1 + \int_0^t \frac{\sin((t-s)|D|)}{|D|}h(s, \cdot)ds$$

ただし $D = (-i\partial_1, \dots, -i\partial_d)$.

同様にして, Fourier 変換による議論を用いることで, 消散型波動方程式 (DW) の解も, 形式的に次で与えられることがわかる。

$$u(t, x) = K_0(t, D)u_0 + K_1(t, D) \left(\frac{1}{2}u_0 + u_1 \right) + \int_0^t K_1(t-s, D)h(s, x)ds, \quad (3)$$

$$K_0(t, \xi) = e^{-\frac{t}{2}} \cos(t\varphi(\xi)), \quad K_1(t, \xi) = e^{-\frac{t}{2}} \frac{\sin(t\varphi(\xi))}{\varphi(\xi)},$$

ただし

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}} & (|\xi| > \frac{1}{2}) \\ i\sqrt{\frac{1}{4} - |\xi|^2} & (|\xi| \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

さて, こうして形式的に (DW) の解が得られた. しかしこの解は形式的な議論で得られたものであり, 数学的な正当性は怪しい. これらの議論を正当化するためには, とくに事実 1,2 が成立する “都合の良い” 関数というものをはっきりとさせなければならない.

事実 1,2 が成立するような関数の集合として, 急減少関数 (平たく言うと指数減衰しているような C^∞ 関数) の集合 \mathcal{S} や, 台がコンパクトな C^∞ 関数の集合 C_0^∞ などが存在するが, 次の Lebesgue 空間はこれらを稠密集合として持つ完備距離空間であることが知られている.

$$L^p = \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ (可測関数)} : \|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty).$$

一般に L^p に属する関数は微分できない (というか通常の意味の関数ですらない). しかし事実 1,2 を用いた “広い意味の微分” を用いることで, 次の Sobolev 空間 $W^{s,p}$ ($s \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$) が定義される.

$$W^{s,p} = \{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ (可測関数)} : \|f\|_{s,p} := \|(1 + |D|^2)^{s/2} f\|_p < \infty \}.$$

大雑把に言うと Sobolev 空間 $W^{s,p}$ とは, s 階まで “広い意味の微分” ができて, そのすべてが L^p に属するという関数の集合である. この Sobolev 空間が, Fourier 変換を用いた解析を行う上で基本的な空間となる.

3 消散型波動方程式の解の性質 (熱と波動成分への分解)

(DW) の解表示は得られたので, 次に興味があるのは解 u の振る舞いである. 今回考える消散型波動方程式の解の重要な性質として, 次のように熱部分と波動部分に分解できることが知られている ([5]).

$$u(t) = \underbrace{J(t)}_{\text{拡散部分}} + \underbrace{e^{-\frac{t}{2}} W(t)}_{\text{波動部分}}, \quad (4)$$

もう少し正確に述べると, $W(t)$ はある波動方程式の解であり, 拡散部分 $J(t)$ には次の熱方程式と類似した L^p - L^q 評価が成立する.

$$\|J(t)\|_p \leq C(1+t)^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}(\|u_0\|_q + \|u_1\|_q) \quad (5)$$

この事実は, 元々は別の解表示を用いて示されたが, 今回は解表示 (3) から考察してみよう. 消散型波動方程式の解の発展群の Fourier 像 $K_j(t, \xi)$ は, 高周波 ($|\xi| \gg 1$) と低周波 ($|\xi| \ll 1$) では性質が大きく異なる. 具体的には高周波の場合

$$\varphi(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}} = |\xi| + o(|\xi|^{-1}) \quad (|\xi| \rightarrow \infty)$$

となることに注意すると,

$$K_0(t, \xi) \cong e^{-\frac{t}{2}} \cos(t|\xi|), \quad K_1(t, \xi) \cong e^{-\frac{t}{2}} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$$

より, フーリエ像はそれぞれ波動方程式の解の発展群に近似されることが予想される. 一方で低周波の場合は

$$\varphi(\xi) = i\sqrt{\frac{1}{4} - |\xi|^2} = \frac{i}{2} + o(|\xi|) \quad (|\xi| \rightarrow 0)$$

となることに注意すると,

$$\hat{K}_0(\xi) \cong \frac{1}{2}e^{t|\xi|^2}, \quad \hat{K}_1(\xi) \cong e^{t|\xi|^2}$$

より, そのフーリエ像はそれぞれ熱方程式の解の発展群で近似されることが予想される.

この考察により, 消散型波動方程式の解は, 高周波成分が波動方程式の解とよく似た振る舞いをする一方, 低周波成分は熱方程式の解とよく似た振る舞いをしているのだと予想される. 実際にこの予想が正しいことは, 多くの研究によって証明されている.

熱・波動への分解 (4) が, 実は高周波・低周波への分解することに対応していることは, L^p - L^q 評価 (5) にも現れている. 評価 (5) と, 実際の熱方程式の L^p - L^q 評価が大きく異なる点は, 前者は $t=0$ において有界である点にある. これは熱方程式の $t=0$ での特異性が低周波成分には現れないという事実と対応しており, 消散型波動方程式 (DW) の解において $t=0$ における特異性は低周波部分には存在しないことを意味している. この事実は転じて, 消散型波動方程式 (DW) のもつ $t=0$ における特異性は, 波動成分にのみ由来することを意味しており, 解の減衰が期待されない初期値 (たとえば $W^{1,2} \times L^2$ のみに属する場合) に対する解の適切性については, 波動方程式的な性質に着目しなければならないことを示唆している.

4 Strichartz 評価と解の一意存在

我々は非線形消散型波動方程式に興味を持っている. 特に次のような, べき乗型の非線形項を持つ初期値問題において, 初期データがエネルギークラス $W^{1,2} \times L^2$ にのみ属している場合に解けるかという問いは基本的な問題である.

$$(NDW) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta + \partial_t)u(t, x) = |u|^{\alpha-1}u & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \\ (u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, u_1) \in W^{1,2} \times L^2. \end{cases}$$

初期値がエネルギークラスにのみ所属する場合は, 一般に時間減衰評価が導出されない ((5) において $p = q = 2$ とせよ). その為消散型波動方程式の可解性議論によく用いられる, 一般的な埋め込み定理を用いた重みつきエネルギー法が使いづらい. そこで我々は, §3 で説明した解の分解を利用して時間大域的な Strichartz 型評価の導出することで, 非線形問題の可解性を議論しようと考えた.

今回得られたのは, 次の消散型波動方程式における Strichartz 型評価である.

Theorem 4.1. $d = 2$ または 3 とする. 二組の指数 (θ_j, p_j) ($j = 1, 2$) が次を満たすと仮定する.

$$(A) \quad 2 < \theta_j \leq \infty, \quad \begin{cases} 2 \leq p_j \leq \frac{2d}{d-2} & (d = 3) \\ 2 \leq p_j < \infty & (d = 2) \end{cases} \quad \text{and} \quad d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j} \right) \geq \frac{2}{\theta_j},$$

$$(B) \quad 2d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j} \right) - \mu \leq \frac{2}{\theta_j} \quad \text{and} \quad \mu_j = \max \left\{ 1, (d+1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j} \right) \right\}.$$

この時, 次の (I)(II) が成立する.

(I) 次を満たす $2 \leq l \leq \frac{2d}{d-1}$ と $\sigma \in [0, 1]$ が存在すると仮定する.

$$\frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{l}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{\sigma}{p_2} + \frac{1-\sigma}{l} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\theta_1} = \frac{\sigma}{\theta_2}.$$

このとき, 次の評価が成立する.

$$\left\| \int_0^t K_1(t-s)h(s)ds \right\|_{L_t^{\theta_1} L_x^{p_1}} \leq C \|h\|_{L_t^{\theta_2'} W_x^{\mu_2-1, p_2'}},$$

(II) 次を満たす $\sigma \in [0, 1]$ が存在すると仮定する.

$$\frac{1}{p_2} = \frac{\sigma}{p_1} + \frac{1-\sigma}{2} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\theta_2} = \frac{\sigma}{\theta_1}.$$

このとき, 次の評価が成立する.

$$\left\| \int_0^t K_1(t-s)h(s)ds \right\|_{L_t^{\theta_1} L_x^{p_1}} \leq C \|h\|_{L_t^{\theta_2'} W_x^{\sigma(\mu_1-1), p_2'}},$$

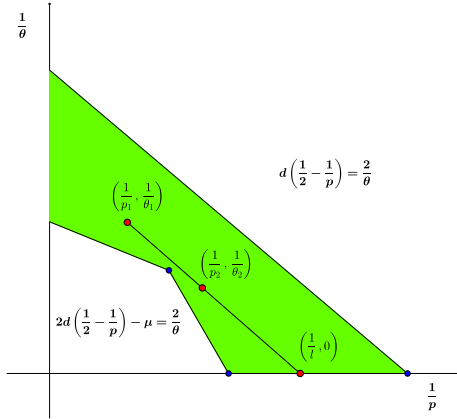


図 1: $d = 2$

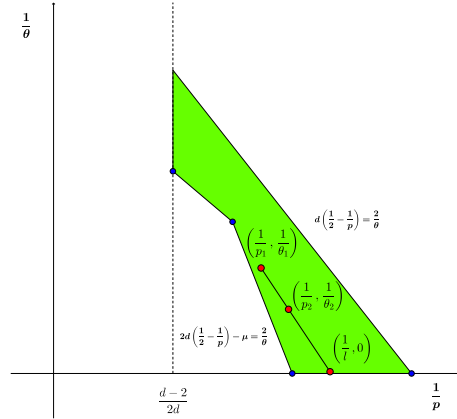


図 2: $d = 3$

(I) は $\frac{1}{p_1} \geq \frac{1}{p_2}$ の場合, (II) は $\frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{p_2}$ の場合である. 条件 (A) は拡散部分に由来する制限であり, 等号を満たす (θ, p) は Schrödinger 方程式における L^2 許容指数と一致する (e.g. [2]). 一方条件 (B) は波動部分に由来する制限であり, 特に $(\frac{d-1}{2d}, 0)$ と $(\frac{d-1}{2(d+1)}, \frac{d-1}{2(d+1)})$ を結ぶ直線上で, Theorem 1 の主張は波動方程式に対する Strichartz 評価とほぼ一致する (e.g. [1]).

証明については, L^p-L^q 評価から Hardy-Littlewood 不等式を用いて $L_t^\theta L_x^p - L_t^{\theta'} L_x^{p'}$ を構成するまでは, 他の方程式に対する Strichartz 型評価の導出の際と同様に議論される (たとえば小川 §12). $L_t^\theta L_x^p - L_t^{\theta'} L_x^{p'}$ さえ得られれば, Schrödinger 方程式や波動方程式などでは, 双対性議論 (Duality Argument) と呼ばれる手法により指数の取替えも含む評価が得られる. しかしこの議論には, 発展群のユニタリ性 (もしくは時間可逆性) が必要であり, 今回の消散型波動方程式の発展群にはそのような性質は期待されない. そこで我々は, 消散型波動方程式が持つ消散効果を代用品として利用することで, 直接補間定理を適応することを可能にし, 指数の取替えを含む Strichartz 型評価を導出した.

非線形問題 (NDW) について, 初期値がエネルギークラスのみ属する場合は, Nakao や Radu によって $1 < \alpha < \frac{d+2}{d-2}$ に対する解の一意存在が知られていた. しかしその議論は複雑であり, 特に存在時間 T が初期値のどのような量に因っているのかわかりづらいという欠点があった. さらに臨界べき $\alpha = \frac{d+2}{d-2}$ ($d \geq 3$) については局所解の存在すら示されていなかった.

そこで我々は Theorem 4.1 を用いることで, 劣臨界べきの非線形項を持つ (NDW) に対する局所解存在定理に簡明な証明を与え, さらに存在時間が初期データのエネルギーノルムにのみよることを示した.

Theorem 4.2. $d = 3$, $3 < \alpha < 5$ とし, さらに $\|(u_0, u_1)\|_{W^{1,2} \times L^2} \leq A$ を仮定する. この時ある存在時間 $T = T(A, \alpha) > 0$ が存在して (NDW) は局所一意解を次のクラ

スに持つ:

$$C^1([0, T]; L^2) \cap C^0([0, T]; W^{1,2}).$$

さらに臨界べきについても, 次の大域解の存在定理を得た.

Theorem 4.3. $d = 3, \alpha = 5$ とする. ある $\tilde{\delta} > 0$ が存在して, $\|(u_0, u_1)\|_{W^{1,2} \times L^2} \leq \tilde{\delta}$ を満たすならば, (NDW) は時間大域的な解を $C^1([0, \infty); L^2) \cap C^0([0, \infty); W^{1,2})$ 上で一意に持つ.

これらの定理の証明は, (NDW) を積分方程式に書き直し, 非線形部分を Strichartz 型評価によって処理をして, 最終的に Banach の不動点定理を適応することで完成する. この議論自体は非常にスタンダードなものであるが (たとえば Cazenave[2], 小川 [6]§17 を見よ), 実際に議論が回るような Strichartz 型評価の指数 (p, θ) が取れるかどうかの問題となる. しかし今回得られた Strichartz 型評価は, すでによく知られている非線形波動方程式の可解性議論で用いられる指数と同じものが取れるため, 問題なく上の二つの定理が証明されるのである.

参考文献

- [1] J. Ginibre and G. Velo, Generalized Strichartz inequalities for the wave equation. J.Funct. Anal., 133, 1995, 50-68.
- [2] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger Equations, American Mathematical Soc., 2003.
- [3] K. Nishihara, L^p - L^q estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application, Mathematische Zeitschrift, Volume 244, Issue 3, 2003, 631-649.
- [4] T. Watanabe, Strichartz type estimates for the damped wave equation and their application, preprint.
- [5] K. Nishihara, L^p - L^q estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application, Mathematische Zeitschrift, Volume 244, Issue 3, 2003, 631-649.
- [6] 小川卓克, 非線形発展方程式の実解析的方法 (シュプリンガー現代数学シリーズ), 丸善出版, 2012.