複素スカラー場のハミルトニアンが生成する熱半群について

和田　和幸　(北大理)*

2015/3/4

1　導入

複素スカラー場の相互作用を記述するハミルトニアンが生成する熱半群について考察する．下に有界な自己共役作用素を考える．スペクトルの下限が固有値となっている場合, その固有空間の次元が 1 次元かどうかを調べたくなる事がある．一意的に存在する為の十分条件として Perron-Frobenius の定理がよく知られている．Perron-Frobenius の定理を述べるにあたり, ”正値性改良” と呼ばれる有界作用素のクラスが非常に重要である．シュレディンガー作用素や実スカラー場のハミルトニアンが生成する熱半群は大体の場合”正値性改良”である場合が多い事が知られている．これはシュレディンガー作用素や実スカラー場のハミルトニアンの相互作用を記述する部分が大体”関数”になっている為である．しかし複素スカラー場のハミルトニアンを考える場合, 状況が一変し”微分作用素”に相当する作用素が相互作用項として入ってくる．この場合”正値性改良”かどうかはまだ未解決である．複素スカラー場の相互作用を記述するハミルトニアンに対してその熱半群の正値改良性を考える理由は, 固有空間が 1 次元である場合, その全電荷が 0 である事が即座に従うからである．このレポートでは, あるクラスの複素スカラー場のハミルトニアンが生成する熱半群が”正値性改良型”より弱い”正値性保存型”である事を報告する．

2　正値性保存作用素, 正値性改良作用素

二つの測度空間 $(X, \mathcal{F}, d\mu)$, $(Y, \mathcal{G}, d\nu)$ を用意し, その上のヒルベルト空間 $L^2(X, d\mu)$, $L^2(Y, d\nu)$ を考える．

定義 1(正値性保存型作用素, 正値性改良型作用素)
T を $L^2(X, d\mu)$ から $L^2(Y, d\nu)$ への有界な線形作用素とする．

(1)T が正値性保存であるとは, 任意の $f \in L^2(X, d\mu)$, $f \geq 0$, $f \neq 0$ に対し, $Tf \geq 0$, ν-a.e. が成立する事をいう．

(2))T が正値性改良であるとは, 任意の $f \in L^2(X, d\mu)$, $f \geq 0$, $f \neq 0$ に対し, $Tf > 0$, ν-a.e. が成立する事をいう．

正値性保存と正値性改良の違いは恒等的に 0 でない関数を T で写した先の関数が非負か, 真に正の関数かの違いであるが, その違いは重要である．Perron-Frobenius の定理は以下に述べられる．

定理 2(Perron-Frobenius の定理)
(M, dm) を σ-有限な測度空間とし, T を $L^2(M, dm)$ 上の下に有界な自己共役作用素とする．T のスペクトルの下限が固有値になっており, e^{-tT} は正値性改良であるとする．この時 T のスペクトルの下限の固有空間は 1 次元であり, 対応する固有ベクトルは殆ど至る所正の関数としてとる事ができる．

例 3(正値性保存作用素, 正値性改良型作用素)
(1)　Δ を $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で作用する d-次元 Laplacian とする．この時 $e^{t\Delta}$, $(t > 0)$ は正値性改良である．
(2)　V を $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で作用する, 下に有界な実数値関数による掛け算作用素とする。この時 e^{-tV}, $(t > 0)$ は正値性保存である．

* E-mail; wadakazu(at)math.sci.hokudai.ac.jp

(3) $V \in C(\mathbb{R}^d)$ で下に有界な関数とする．この時、$e^{-t(-\Delta+V)}$, $(t>0)$ は正値性改良型作用素である．

シュレディンガー作用素の生成する熱半群は Feynman-Kac の公式と呼ばれる，ブラウン運動の実現する確率空間の上の積分として表示する事が可能である．この公式を用いてシュレディンガー作用素の性質を導く事が可能である．次の章で量子場の場合を考察する．

3 ガウス超過程と複素スカラー場のハミルトニアン

この章でガウス超過程に関する基本事項と，主に考察するハミルトニアンの定義をする．$\mathcal{K}$ を可分な実ヒルベルト空間とする．

定義 4(ガウス超過程)

$\{\Phi(f)|f \in \mathcal{K}\}$ を $\mathcal{K}$ を添え字集合とする，(Q,Σ,μ) 上の確率変数の族とする．$\{\Phi(f)|f \in \mathcal{K}\}$ がガウス超過程であるとは，
(1) $\phi(f)$ は平均 0 で，$f,g \in \mathcal{K}$ に対し共分散が

$$\int_Q \phi(f)\phi(g)d\mu = \frac{1}{2}\langle f,g\rangle_{\mathcal{K}}.$$

で与えられるガウス型確率変数である．

(2)
$$\phi(\alpha f+\beta g) = \alpha\phi(f)+\beta\phi(g), \quad \text{a.s.}, \quad (\alpha,\beta \in \mathbb{R}, \ \ f,g \in \mathcal{K}).$$

(3) Σ は $\{\phi(f)|f \in \mathcal{K}\}$ を可測にさせる最小の σ-集合体である．

添え字のヒルベルト空間を複素係数まで広げる為に，$\mathcal{K}$ の複素化である $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ を導入する．$f = f_1 + if_2 \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ に対し、確率変数 $\phi(f)$ を，

$$\phi(f) := \phi(f_1) + i\phi(f_2)$$

と定める．(Q,Σ,μ) 上の 2 乗可積分関数全体のなす複素ヒルベルト空間を $L^2(Q,d\mu)$ とし、それを $\mathcal{H}$ と表す事にする。Wiener - Ito - Segal 分解により，$\mathcal{H}$ は次のように直和分解される事が知られている．

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

$$\mathcal{H}_n := \overline{\text{L.H.}\{:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):|f_j \in \mathcal{K}, j=1,\cdots,n\}}, \qquad \mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$$

ここで集合 A に対し，L.H.{A} で A の生成する部分空間を表し，$\overline{A}$ で集合 A の $\mathcal{H}$ によるノルム閉包を表すとする．$: \cdot :$ は確率変数の Wick 積を表し，以下で帰納的に定義される．$f_1,\cdots f_n \in \mathcal{K}$ とする．

$$:\phi(f_1) := \phi(f),$$

$$:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n) := \phi(f_1):\phi(f_2)\cdots\phi(f_n): -\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\langle f_1,f_j\rangle :\phi(f_2)\cdots\phi(\hat{f_j})\cdots\phi(f_n):.$$

ここで,$\hat{}$ は省略するという記号である．次に $\mathcal{K}$ 上の非負の自己共役作用素 ω を導入する．この時 ω の第二量子化作用素 $\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{S}}(\omega)$ を次の性質を満たす作用素の閉包として定義する．

$$\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{s}}(\omega):\phi(f_1)\cdots\phi(f_n) := \sum_{j=1}^{n} :\phi(f_1)\cdots\phi(\omega f_j)\cdots\phi(f_n):,$$

$$\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{s}}(\omega)1 = 0.$$

$\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{s}}(\omega)$ は $\mathcal{H}$ 上の非負の自己共役作用素となり, 様々な性質が良く分かっている. T を $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ 上の縮小作用素とする. この時, $\mathcal{H}$ 上の縮小作用素 $\Gamma(T)$ を次を満たす作用素として定める.

$$\Gamma(T):\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):=:\phi(Tf_1)\cdots\phi(Tf_n):,$$
$$\Gamma(T)1=1.$$

$f\in\mathcal{K}$ に対し, $\pi(f)$ を次で定める.

$$\pi(f):=\Gamma(i)\phi(f)\Gamma(-i)$$

$\{\phi(f),\pi(g)|f,g\in\mathcal{K}\}$ は無限自由度の正準交換関係を満たす事が知られている.

例 5

実ヒルベルト空間として簡単な $\mathbb{R}$ を考える. この時, あるユニタリ変換 U で次の性質を満たすものが存在する.

$$U:L^2(Q,d\mu)\quad\to\quad L^2(\mathbb{R})$$
$$U\phi(1)U^{-1}=x,\qquad U\pi(1)U^{-1}=\overline{-i\frac{d}{dx}}$$

従って, $f\in\mathcal{K}$ に対し, $\phi(f)$ は無限自由度の空間における位置作用素, $\pi(f)$ は無限自由度の空間における 運動量作用素 と思う事が出来る. $L^2(\mathbb{R})$ において, 位置作用素と運動量作用素がフーリエ変換によって関係づけられていた事を思い出すと, $\Gamma(i)$ は無限自由度の空間における”フーリエ変換”と思える.

$\langle f,g\rangle_{\mathcal{K}}=0$ とする. 今回考察するハミルトニアン H は以下のものである.

$$H:=\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{s}}(\omega)+\Big(\phi(f)^2+\pi(g)^2\Big)^k,\quad(k=1,2).$$

このハミルトニアンは複素スカラー場の非自明な相互作用の中で扱いやすいものである. 空間の自由度まで込めた相互作用モデルの解析は [4] でなされている. これまで調べられてきた実スカラー場のハミルトニアンとの違いは $\pi(g)$ の項がある点である. 実スカラー場のハミルトニアンが生成する半群も場合もシュレディンガー作用素と同様に、確率空間上の積分として表示する事が出来る。実スカラー場の結果は [1], [3] を参照されたい.

4 主結果

補題 6

(1)$\mathscr{H}$ を複素ヒルベルト空間とし, A を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする. すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して e^{itA} が正値性保存作用素ならば, e^{-tA^2} は正値性保存作用素である.

(2)A を非負の自己共役作用素とする. f を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数とし, $\inf_{x\in[0,\infty)}|f(x)|<\infty$ とする. $e^{-tf(A)}$ が正値性保存作用素とする.

$$F(x):=\int_0^x f(y)dy$$

で F を定めるならば, $e^{-tF(A)}$ も正値性保存作用素である. $\langle f,g\rangle_{\mathcal{K}}=0$ より, $\phi(f),\pi(g)$ は強可換である. $e^{-it\pi(g)}$ が正値性保存である事は分かっているので [3], 上の補題の系として次が得られる.

系 7

$e^{-t\pi(g)^2}$, $e^{-t(\phi(f)^2+\pi(g)^2)^k}$, $(k=1,2,\cdots)$ は正値性保存作用素である.

$\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{s}}(\omega)$ は正値性保存作用素なので, 次の定理が得られる. これが本レポートにおける主結果である.

定理 8

H は $\mathcal{H}$ 上の正値性保存作用素である.

5　終わりに

導入部分でも説明したように, 今回考察したハミルトニアンが正値性改良であるかどうかはまだ未解決問題である. もとより, $\pi(f)$ の作用素の性質についてこれまであまり研究されていない為に $\pi(f)$ の性質についても調べていく必要があると考えられる. [2] では同じ複素スカラー場のハミルトニアンの性質について考察されているが, 相互作用の定義を少し変更している為, $\pi(g)$ は登場せず, $\phi(f)$ のみが相互作用項に現れる. この時ハミルトニアンは正値性改良作用素になるが, 元々複素スカラー場が持っていた全電荷保存則が壊れているので, どのような物理量が保存されているのかが不明である. 今回導入したハミルトニアンは $\pi(g)$ が相互作用素項に含まれており扱いが難しくなっているが, 全電荷保存則が成り立っている為, 基底状態が存在した場合にどの全電荷の空間に属しているかという興味深い問が考えられる. この意味で今回のハミルトニアンの更なる解析を進めていきたいと考えている.

参考文献

[1] 新井 朝雄, 量子数理物理学における汎関数積分法, 共立出版, (2010)

[2] C. Gérard, “Spectral and Scattering Theory of Space-cutoff Charged $P(\varphi)_2$ Models”, Lett. Math. Phys, **92**, 197-220, (2010).

[3] V. Betz, F. Hirishima, J. Lörinczi, “*Feynman-Kac type theorems and Gibbs measures on path space*”, DeGruyter, Germany, (2011)

[4] K. Wada, “Spectral analysis of a massless charged scalar field with spacial cut-off ”, arXiv:1405.3773 [math-ph] (2014).