アフィン対角的 2 次曲面の Brauer 群について

植松 哲也*

概要

3 つの係数 b, c, d でパラメトライズされたアフィン対角的 2 次曲面 $x^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$ の族を考えると, 各曲面に対して, Brauer 群と呼ばれる不変量が定義される. 主結果は, 各曲面の Brauer 群の生成元を一斉に与えるような代数的な公式 (統一的生成元) の非存在定理である.

キーワード: Brauer 群, アフィン対角的 2 次曲面, 統一的生成元
MSC 2010: Primary: 14F22, Secondary: 11R34, 19R15, 14J26

1 はじめに

本稿は, 2015 年 3 月 2 日から 5 日にかけて行われた「第 11 回数学総合若手研究集会」における著者の講演内容を中心として, 関連する概念等の解説を行ったものである. 主結果の証明をはじめ, 詳しい内容については, プレプリント [Uem] を参照されたい.

2 Brauer 群

表題にあるように, 本研究における研究対象はある多様体の **Brauer 群**とよばれる不変量である. 本論に入る前に, この Brauer 群について, 振り返っておく.

2.1 体の Brauer 群

歴史的には, まず, 体 k の Brauer 群が定義された. 体 k 上の中心的単純環とは, (可換とは限らない) 有限次元 k-代数 A であって, A の中心が k に等しく, 非自明な両側イデアルを持たないもののことをいう. ここで, 体 k に対し, **「k 上の中心的単純環がどれくらいあるのか？」**ということを考えるのは自然であろう. この問に対して, 次のような構造定理が知られている ([Wed08]):

命題 2.1. *体 k 上の中心的単純環 A に対し, ある 正整数 n と k 上の中心的斜体 D が存在して, k-代数の同型 $A \cong M_n(D)$ がある. さらに, n は一意的であり, D も k-同型を除いて一意的である.*

したがって, 中心的単純環の分類は斜体の分類に帰着される. そこで, k 上の中心的単純環 A, B に対し,

$$A \sim B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{ある } n, m \text{ と斜体 } D \text{ が存在して}, \ A \cong M_n(D),\ B \cong M_m(D)$$

と関係 $\sim$ を定義すると, これは k 上の中心的単純環の同型類の集合上の同値関係 (森田同値) を与えることがわかる. この集合を $\mathrm{Br}(k)$ と書き, A の同値類を $[A]$ で表す. $[A] + [B] := [A \otimes_k B]$ と定めると, これは 集合 $\mathrm{Br}(k)$ 上の二項演算として well-defined であり, これにより, $\mathrm{Br}(k)$ はアーベル群となることが知られている. これが 体 k の Brauer 群である.

Brauer 群は Galois コホモロジーを用いても記述することができる. 実際, アーベル群の同型 $H^2(k, \overline{k}^*) \cong \mathrm{Br}(k)$ がある. この同型の具体的記述については, 例えば [斎 97] を参照のこと.

* 豊田工業高等専門学校 一般学科 e-mail:utetsuya@08.alumni.u-tokyo.ac.jp

2.2 シンボル

以下, 体 k の標数は 0 とし, ある自然数 n を固定し, 1 の n 乗根のなす群 μ_n が k に含まれるものとする. さらに, 1 の 原始 n 乗根 ζ を一つ固定しておく. このとき, k の乗法群 k^* の 2 元 a, b から Brauer 群の元を対応させる準同型 $\{\cdot,\cdot\}_n$ (**ノルム剰余記号**) を構成することができる:

$$\{\cdot,\cdot\}_n\colon k^* \otimes k^* \to H^1(k,\mu_n) \otimes H^1(k,\mu_n) \overset{\cup}{\to} H^2(k,\mu_n \otimes \mu_n) \cong H^2(k,\mu_n) \hookrightarrow H^2(k,\overline{k}^*) \cong \mathrm{Br}(k).$$

ここで, 1 つめ, 4 つめの写像は, Kummer 完全系列 $1 \to \mu_n \to \overline{k}^* \overset{n}{\to} \overline{k}^* \to 1$ から定まる長完全列によるもの, 2 つめの写像はコホモロジーのカップ積, 3 つめの写像は, 同型 $\mu_n \otimes \mu_n \cong \mu_n; \zeta^i \otimes \zeta^j \mapsto \zeta^{ij}$ によるものである. $\{a,b\}_n$ の形に表せる Brauer 群の元を**シンボル**と呼ぶ. $\mathrm{Br}(k)$ の位数 n の元は, このシンボルの幾つかの和として書き表せることが知られている ([MS82]) が, すべての元がシンボル一つで表示できるかどうかということは, 体によって異なり, また, 具体的にどんなシンボル (の和) が Brauer 群の生成元として取ってこれるのか, ということも, 一般には難しい問題である.

2.3 代数多様体の Brauer 群

20 世紀中頃にかけて, 東屋 [Azu51], Grothendieck [Gro68] らにより, 可換環の Brauer 群, より一般に, 代数多様体 (= 代数方程式系の解集合) X の Brauer 群 $\mathrm{Br}(X)$ が定義された. 中心的単純環の代わりに, X 上の東屋代数とよばれる層を考えて, その分類空間として定義する方法と, Galois コホモロジーの一般化であるエタールコホモロジーを用いた定義があるが, ここでは後者を定義として採用する*1:

$$\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m).$$

多様体の Brauer 群は, 体の場合の一般化としての興味の他に, 多様体の性質を調べる上で様々に役立つ, という点からも, 興味のある研究対象である. 例えば, 多様体の有理性 (= 射影空間にどれくらい近いか) を計る指標として Brauer 群が用いられたり ([AM72]), また, 有理数体上の多様体の局所大域原理を調べたり, ゼロサイクルと呼ばれる別の不変量を計算するにおいても, Brauer 群が応用されている ([Man71]).

体 k 上の非特異代数多様体 X に対して, その商体を $k(X)$ と書くとき, 多様体の Brauer 群 $\mathrm{Br}(X)$ は, 自然に商体の Brauer 群 $\mathrm{Br}(k(X))$ の部分群とみなせる ([Gro68], II, 1.10.). したがって, 先に述べた事実から, $\mathrm{Br}(X)$ の位数 n の元は, $k(X)^*$ の元を用いたシンボルの和として表示できることがわかる.

3 アフィン対角的 2 次曲面 と その Brauer 群

前章でみた, 代数多様体 X の Brauer 群 $\mathrm{Br}(X)$ について, 基本的な問題として,

- 群としての構造はどうか？
- 生成元を具体的に書き表すことができるか？

というものを挙げることができるだろう. 本稿の目的は,

$$x^2 + by^2 + cz^2 + d = 0 \ (b, c, d \text{ は } k^* \text{ の元})$$

という定義方程式で定まる, k 上の**アフィン対角的 2 次曲面** $U_{b,c,d}$ に対して, これらの問題を考えることにある. 構造射 $U_{b,c,d} \to \operatorname{Spec} k$ から, 反変函手的に, 群準同型 $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(U_{b,c,d})$ が定まる. 多様体固有の情報に興味があるので, 以下では, この準同型の余核

$$\mathrm{Br}(U_{b,c,d}) / \mathrm{Br}(k) := \mathrm{Coker}(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(U_{b,c,d}))$$

*1 本稿に出てくる多様体に限れば, 両者の定義は同型な群を与えることが知られている.

について, その構造と生成元を考える. 構造については, 次のことがわかる:

命題 3.1. $\mathrm{Br}(U_{b,c,d})/\mathrm{Br}(k)$ は 0 か $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型で, $bcd \in (k^*)^2$ ならば, 0 である.

注意 3.2. $bcd \notin (k^*)^2$ のときに, 0 か $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるかは, 一般には分からないが, 例えば, (i) $U_{b,c,d}(k) \neq \emptyset$(= 定義方程式が k で解を持つ) か (ii) $k = \mathbb{Q}$ または $k = \mathbb{Q}_p$ (より一般に, コホモロジー次元が 2 以下の体) であれば, $\mathrm{Br}(U_{b,c,d})/\mathrm{Br}(k) = 0 \Leftrightarrow bcd \in (k^*)^2$ が成り立つ.

次に, $\mathrm{Br}(U_{b,c,d}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である場合に, その生成元を具体的に求めることができるか, ということを問題にしたい. 例えば, 論文 [CTX09] では, $U_{b,c,d}(k) \neq \emptyset$ という仮定のもとで, 各曲面 $U_{b,c,d}$ ごとに, シンボルを求める手法が与えられている. そこで, ここでは, 生成元の代数的な公式に当たるようなもの, すなわち, B, C, D をパラメータとして, アフィン対角的 2 次曲面の族 $U : x^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0$ を考えたときに, $\mathrm{Br}(U)$ の元 $e = e(B, C, D)$ であって, $(B, C, D) = (b, c, d)$ を (適切な仕方で) 代入すると, $e(b, c, d)$ が各 $\mathrm{Br}(U_{b,c,d})/\mathrm{Br}(k)$ の生成元になるようなものが存在するかどうかを考察したい. このような $e \in \mathrm{Br}(U)$ を **統一的生成元** (uniform generator, [Uem14]) と呼ぶことにする.

もしこのような生成元があれば, 例えば, 前述した多様体のゼロサイクルなど, Brauer 群を用いて計算できる他の不変量を, この族に含まれる各曲面に対して, 統一的に計算できるので, 非常に有用である. 裏を返せば, 統一的生成元の非存在は, その族に含まれる多様体の性質が, 係数ごとに大きく変化しうるといったことを示唆するものであると考えられる.

本研究では, **統一的生成元が (上記のような 3 つのパラメータをもつ) アフィン対角的 2 次曲面の族に対しては存在しない**ことを示した. 以下, 「代入」を定式化した後, 主結果の正確な主張を紹介する.

3.1 Brauer 群の特殊化写像

3 変数多項式環 $\mathcal{O}_F = k[B, C, D]$ に対して, F をその商体とする. $\mathcal{O}_F$ 上のアフィン対角的 2 次曲面

$$\mathcal{U} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_F[x, y, z]/(x^2 + By^2 + Cz^2 + D) \to \mathbb{A}_k^3 = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_F$$

を考え, $U = \mathcal{U} \times_{\mathbb{A}_k^3} \operatorname{Spec} F$ とする. $e \in \mathrm{Br}(U)$ に対して, $\mathbb{A}_k^3$ の開集合 S が存在して, e は $\widetilde{e} \in \mathrm{Br}(\mathcal{U} \times_{\mathbb{A}_k^3} S)$ に持ち上げることができる. ここで, $P = (b, c, d) \in S(k)$ に対して, $U_P = \operatorname{Spec} k[x, y, z]/(x^2 + by^2 + cz^2 + d)$ とおいたとき, e **の** P **における特殊化** $\mathrm{sp}(e; P) \in \mathrm{Br}(U_P)$ を $\widetilde{e}$ の P による引き戻し $P^*\widetilde{e}$ によって定める. これは $\widetilde{e}, S$ の取り方には依らないことがわかる.

3.2 主結果

まず, 特殊化写像の定義域にあたる集合 $\mathcal{P}_k$ を定めておく:

$$\mathcal{P}_k := \{P \in k^* \times k^* \times k^* \mid \mathrm{Br}(U_P)/\mathrm{Br}(k) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$

このとき, 結果は次のように述べることができる:

定理 3.3. *k を 2-closed でない (= 2 次拡大をもつ) 体とする. このとき, アフィン対角的 2 次曲面の族 U に対して, Brauer 群の統一的生成元は存在しない. すなわち, 次の条件を満たす $e \in \mathrm{Br}(U)$ と稠密開集合 $W \subset (\mathbb{G}_{m,k})^3$ は存在しない :*

- *$\mathrm{sp}(e; \cdot)$ が $W(k) \cap \mathcal{P}_k$ 上定義され, かつ*
- *すべての $P \in W(k) \cap \mathcal{P}_k$ に対し, $\mathrm{sp}(e; P)$ は $\mathrm{Br}(U_P)/\mathrm{Br}(k)$ の生成元となる.*

つまり, パラメータ (B, C, D) の動きうる "3 次元領域" W をどんなに小さくとったとしても, その中の各点 (b, c, d) に対して, $\mathrm{Br}(U_{b,c,d})/\mathrm{Br}(k)$ の生成元を与えてくれる "公式" $e \in \mathrm{Br}(U)$ は存在しない, ということである.

注意 3.4. k の non-2-closedness は, $\mathcal{P}_k$ の $(\mathbb{G}_{m,k})^3$ における像の稠密性を保証する条件である. したがって, この仮定のもとでは, $W(k) \cap \mathcal{P}_k \neq \emptyset$ であり, 上記 2 条件が自明な条件になることはない.

3.3 統一的生成元が存在する族の例

上で見たように, 3 つのパラメータ B, C, D を持つようなアフィン対角的 2 次曲面の族に対しては, 統一的生成元は存在しなかったわけであるが, この統一的生成元の概念自体は不自然なものではなく, 統一的生成元を持つような多様体の族も存在する. その一例を紹介し, 本稿の結びとしたい. (対角的 3 次曲面での例については, 論文 [Uem14] を参照されたい.)

パラメータを 2 つにし, $O_F = k[C, D], U : x^2 - y^2 - Cz^2 + D = 0$ なる曲面の族を考える. このとき, 同様にして, 特殊化や $\mathcal{P}_k$ を定めることができる. ここで, シンボル

$$e(C, D) := \{CD, x + y\}_2 \in \mathrm{Br}(F(U))$$

を考えると, $e(C, D)$ は $\mathrm{Br}(U)$ の元を定めることがわかる. このとき, 次が成り立つ:

命題 3.5. この曲面族 U に対してシンボル $e(C, D)$ は統一的生成元である.

謝辞. 講演および本稿執筆の機会を与えてくださった, 第 11 回数学総合若手研究集会の世話人の皆様と, 今回の研究のきっかけとなる質問をして下さった Timothy D. Browning 氏に感謝いたします.

参考文献

[AM72] M. Artin and D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), no. 3, 75–95.

[Azu51] G. Azumaya, *On maximally central algebras*, Nagoya Math. Journal **2** (1951), 119–150.

[CTX09] J.-L. Colliot-Thélène and F. Xu, *Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms*, Compos. Math. **145** (2009), no. 2, 309–363.

[Gro68] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I, II, III*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 46–188.

[Man71] Yu. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes de Congrès international de Mathématiciens (Nice, 1970), vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[MS82] A. S. Merkurjev and A. A. Suslin, *k-cohomology of severi-brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 5, 1011–1046, 1135–1136.

[Uem] T. Uematsu, *On the Brauer group of affine diagonal quadrics*, preprint, available in `http://math.dge.toyota-ct.ac.jp/uematsu/ja/index.html`.

[Uem14] ———, *On the Brauer group of diagonal cubic surfaces*, Q. J. Math. **65** (2014), no. 2, 677–701.

[Wed08] J. H. M. Wedderburn, *On hypercomplex numbers*, Proc. London Math. Soc. **s2-6** (1908), no. 1, 77–118.

[斎 97] 斎藤秀司, **整数論**, 共立講座 21 世紀の数学, vol. 20, 共立出版, 1997.