reflexive 凸多面体とその双対凸多面体の δ 列

土谷　昭善　(大阪大学大学院・情報科学研究科)*

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体、つまり、任意の頂点の座標が全て整数であるような凸多面体とし、$\partial\mathcal{P}$ をその境界とする。任意の正整数 n について、$i(\mathcal{P}, n)$ を

$$i(\mathcal{P}, n) = |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d|$$

で定義する。この時、次のようなことが知られている。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は、n に関する d 次多項式であり、定数項は常に 1 である。
- (Ehrhart 相互法則)　$|n(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N| = (-1)^d i(\mathcal{P}, -n)$ が成立する。

この多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を $\mathcal{P}$ の **Ehrhart 多項式** と呼ぶ。

整数列 $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ を次の公式で定義する。

$$(1-\lambda)^{d+1} \sum_{n=0}^{\infty} i(\mathcal{P}, n)\lambda^n = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \lambda^i.$$

$i(\mathcal{P}, n)$ が n に関する d 次多項式であることなどから、任意の $i > d$ について $\delta_i = 0$ であることがわかる。この整数列

$$\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$$

を $\mathcal{P}$ の δ **列** と呼ぶ。

δ 列について、次のようなことが知られている。

- $\delta_0 = 1$、$\delta_1 = |\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N| - (d+1)$、$\delta_d = |(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d|$ である。よって、$\delta_1 \geq \delta_d$ が成立する。
- δ_i は非負である。([3])
- $i(\mathcal{P}, n)$ の最高次の係数 $\sum_{i=0}^{d} \delta_i/d!$ は $\mathcal{P}$ の通常の体積に一致する。

d 次元整凸多面体 $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$ について、$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が **unimodular 同値**であるとは、unimodular 行列 $U \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ と整数ベクトル $w \in \mathbb{Z}^d$ が存在して、U により定義される線形写像 $f_U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を用いて $\mathcal{Q} = f_U(\mathcal{P}) + w$ とできる時に言う。ここで $v \in \mathbb{R}^d$ に対し、$f_U(v) = vU$ と定める。$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が unimodular 同値であるならば、$\delta(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{Q})$ が成立する。

*e-mail: a-tsuchiya@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

$\mathbb{R}^d$ の原点が $\mathcal{P}$ の内部に属する唯一の整数点になっていると仮定する。このとき、整凸多面体 $\mathcal{P}$ が **reflexive 凸多面体**であるとは、その双対凸多面体

$$\mathcal{P}^\vee := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1, \forall x \in \mathcal{P} \right\}$$

も整となるときに言う。ここで $\langle x, y \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積のことである。

整凸多面体 $\mathcal{P}$ が reflexive 凸多面体となる必要十分条件は δ 列が対称、つまり

$$\delta_i = \delta_{d-i} \quad 0 \leq \forall i \leq d$$

が成立することが知られている ([2])。reflexive 凸多面体 $\mathcal{P}$ の双対凸多面体 $\mathcal{P}^\vee$ もまた reflexive 凸多面体であるので、その δ 列は対称である。しかし、一般的に $\delta(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}^\vee)$ は成立しない。本原稿では reflexive 凸多面体で、δ 列がその双対凸多面体の δ 列と一致するものの存在について議論する。

2 次元の reflexive 凸多面体では δ 列が $(1, 4, 1)$ となるものは全て、その双対凸多面体の δ 列も $(1, 4, 1)$ となる。しかし、他の δ 列を持つ reflexive 凸多面体の場合は全て、その双対凸多面体の δ 列とは異なる。また 3 次元の reflexive 凸多面体では [1, Example 35.11] において、その例が構成されている。しかし、一般次元でのそのような reflexive 凸多面体の例は知られていない。

筆者は、2 次元以上の任意の次元について、reflexive 凸多面体でその δ 列がその双対凸多面体の δ 列と一致する例を、特に unimodular 同値に着目して構成することに成功した。次の定理は、本原稿の主定理である。

定理 1 (a) 各 $d \geq 2$ に対し、d 次元 reflexive 凸多面体 $\mathcal{P}$ で $\mathcal{P}$ とその双対凸多面体 $\mathcal{P}^\vee$ が unimodular 同値となるものが存在する。
(b) 各 $d \geq 3$ に対し、d 次元 reflexive 凸多面体 $\mathcal{P}$ で $\delta(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}^\vee)$ を満たすが、$\mathcal{P}$ とその双対凸多面体 $\mathcal{P}^\vee$ が unimodular 同値とならないものが存在する。

実際には、次のように帰納的に構成する。$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{d-1}$ を $d-1$ 次元 reflexive 凸多面体で、$\delta(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}^\vee)$ となるものとする。これを用いて、d 次元整凸多面体

$$\mathcal{Q} = \mathrm{conv}(\{\mathcal{P} \times [-1, 0], (0, 0, \ldots, 0, 1)\})$$

を定義する。このとき、$\mathcal{Q}$ は reflexive であり、かつ $\delta(\mathcal{Q}) = \delta(\mathcal{Q}^\vee)$ である。

さらに $\mathcal{P}$ が $\mathcal{P}^\vee$ と $w = 0$ である unimodular 同値のとき、$\mathcal{Q}$ は $\mathcal{Q}^\vee$ と unimodular 同値となり、$\mathcal{P}$ が $\mathcal{P}^\vee$ と unimodular 同値でないとき、$\mathcal{Q}$ は $\mathcal{Q}^\vee$ と unimodular 同値でないので、この $\mathcal{Q}$ が条件を満たす reflexive 凸多面体であることがわかる。

定理 1 の証明では d 単体、つまり $d+1$ 個の頂点で構成される d 次元整凸多面体に制限すると成立しない。筆者はさらに、2 次元以上の任意の次元について、reflexive 単体で δ 列がその双対凸多面体の δ 列と一致する例の構成に成功した。次の定理は、本原稿の 2 つ目の主定理である。

定理 2 各 $d \geq 2$ に対し、d 次元 reflexive 単体 $\mathcal{P}$ で $\mathcal{P}$ とその双対凸多面体 $\mathcal{P}^\vee$ が unimodular 同値となる、つまり $\delta(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}^\vee)$ となるものが存在する。

実際には次のように構成する。$d=2$ のときは、

$$\mathcal{P}=\mathrm{conv}(\{(1,0),(-1,2),(-1,-1)\})$$

$d=3$ のときは、

$$\mathcal{P}=\mathrm{conv}(\{(1,0,0),(1,2,0),(1,0,2),(-3,-2,-2)\})$$

がその例である。

$d\geq 4$ の場合を考える。$e_1,\dots,e_d$ を $\mathbb{R}^d$ の標準基底とする。Sylvester 列と呼ばれる整数列を次のように定義する。

$$b_1:=2, b_n:=1+b_1\cdots b_{n-1}(n\geq 2)$$

これを用いて $d+1$ 個の整数点を定義する。

$$v_i=\begin{cases} -3e_1-2\displaystyle\sum_{i=2}^{d}e_i & i=0,\\ e_1 & i=1,\\ e_1+2e_i & i=2,3,\\ e_1+b_{i-3}e_i & i=4,\dots,d,\end{cases}$$

これらを用いて、d 単体

$$\mathcal{P}=\mathrm{conv}(\{v_0,\dots,v_d\})$$

を定義する。このとき、$\mathcal{P}$ は reflexive であり、さらに $\mathcal{P}^\vee$ の頂点は次の整数点となる。

$$w_i=\begin{cases} e_1 & i=0,\\ (a_1,\dots,a_d) & i=1,\\ e_1-2e_i & i=2,\dots,d\end{cases}$$

ここで

$$a_i=\begin{cases} -(4b_1\cdots b_{d-3}-1) & i=1,\\ \dfrac{4b_1\cdots b_{d-3}}{2} & i=2,3,\\ \dfrac{4b_1\cdots b_{d-3}}{2b_{i-3}} & i=4,\dots d.\end{cases}$$

である。このとき、$\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}^\vee$ と unimodular 同値となる。よって、この $\mathcal{P}$ が条件を満たす reflexive 単体であることがわかる。

参考文献

[1] T. Hibi, Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes, Carslaw Publications, Glebe, N.S.W., Australia, 1992.

[2] T. Hibi, Dual polytopes of rational convex polytopes, *Combinatorica* **12**(1992), 237–240

[3] R. P. Stanley, Decompositions of rational convex polytopes, *Annals of Discrete Math.* **6** (1980), 333 – 342.

[4] A. Tsuchiya, The δ-vectors of reflexive polytopes and of the dual polytopes, arXiv:1411.2122v1.