準線形波動方程式の初期値問題の可解性

冨澤　佑季乃　(中央大学)*

概　　要

準線形波動方程式の初期値問題について論じる。Banach 空間における非自励微分方程式の初期値問題は、ある条件を満たす距離に似た汎関数を設定することで局所解および大域解の存在と一意性を示せる。本文では、この抽象的結果を準線形波動方程式に応用した場合の具体例を紹介する。

本結果は、小林良和教授（中央大学）と田中直樹教授（静岡大学）との共同研究に依るものである。

1. 導入：準線形波動方程式

次の準線形波動方程式の初期値問題を考える: $t \in [0,\infty)$ と $x \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x v, \\ \partial_t v = \partial_x \sigma(t,u) - \gamma v, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \end{cases} \qquad (\mathrm{IVP};\ 0, (u_0, v_0))$$

ただし γ は正の定数であり, $\sigma(\cdot,\cdot)$ は $[0,\infty)\times\boldsymbol{R}$ 上の滑らかな実数値関数で次を満たす:

(i) $\sigma(t,0)=0$ かつ, 正の定数 δ_0 が存在して, $(t,r)\in[0,\infty)\times\boldsymbol{R}$ に対して $\sigma_r(t,r)\geq\delta_0$.

(ii) 正の定数 L_0 が存在して, $t\in[0,\infty)$ に対して $\|\sigma_r(t,\cdot)\|_{L^\infty}\leq L_0,\ \|\sigma_{rr}(t,\cdot)\|_{L^\infty}\leq L_0$ かつ $\|\sigma_{rrr}(t,\cdot)\|_{L^\infty}\leq L_0$.

(iii) 連続な可積分関数 $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ が存在して, $t\in[0,\infty)$ に対して $\|\sigma_{tr}(t,\cdot)\|_{L^\infty}\leq h(t)$.

この偏微分方程式の問題は, 常微分方程式の形に書き直す事で可解性が示される.

2. 準備：非自励微分方程式と解の存在

$(X,\|\cdot\|)$ を実 Banach 空間とする. $-\infty<a<b\leq\infty$ とし, $\Omega\subset[a,b)\times X$ を $t\in[a,b)$ に対して $\Omega(t):=\{x\in X:(t,x)\in\Omega\}\neq\emptyset$ を満たす集合とする. $A:\Omega\to X$ を関数とする. $(\tau,z)\in\Omega$ を与えて, 次の非自励微分方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} u'(t) = A\bigl(t,u(t)\bigr), \quad \tau\leq t<b, \\ u(\tau)=z. \end{cases} \qquad (\mathrm{IVP};\ \tau, z)$$

$J\subset[a,b)$ を $[\tau,c]$ または $[\tau,c)$ の形をした部分区間とする. X-値連続関数 $u:J\to X$ が J 上で微分可能, $t\in J$ に対して $\bigl(t,u(t)\bigr)\in\Omega$, $u(\tau)=z$ かつ $u'(t)=A\bigl(t,u(t)\bigr)$ を満たすとき, u は (IVP;τ,z) の J 上の **(局所) 解**と言う. (IVP;τ,z) の $[\tau,b)$ 上の解は**大域解**と言う. ここで次の条件を考える.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A12, 47J35

キーワード：Nonautonomous differential equations, initial-value problems, metric-like functionals, evolution operators

* 〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学科

e-mail: `tomizawa@gug.math.chuo-u.ac.jp`

(Ω1) (連続性条件) A は Ω の上から X への写像として連続である.

(Ω2) (閉性条件) $n = 1, 2, \ldots$ に対して $(t_n, x_n) \in \Omega$ とする. もし $n \to \infty$ のとき $\boldsymbol{R}$ 内で $t_n \uparrow t \in [a, b)$ かつ X 内で $x_n \to x$ ならば, $(t, x) \in \Omega$ となる.

(Ω3) (劣接線条件) $(t, x) \in \Omega$ に対して $\liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} d\big(x + hA(t, x), \Omega(t + h)\big) = 0$ となる. ただし $d(x, S)$ は $x \in X$ から $S \subset X$ までの距離を表わす.

(Ω4) (消散条件) 連続関数 $\omega : [a, b) \to [0, \infty)$ が存在して, $t \in [a, b)$ と $x, y \in \Omega(t)$ に対して次が成り立つ.

$$\liminf_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\Big(V(t + h, x + hA(t, x), y + hA(t, y)) - V(t, x, y)\Big) \leq \omega(t) V(t, x, y).$$

ただし $V(t, \cdot, \cdot)$ は次の条件 $(V1)$–$(V4)$ を満たし, $t \in [a, b)$ をパラメーターとする $X \times X$ 上の汎関数の族である:

$(V1)$ $L > 0$ が存在して, $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in X \times X,\ t \in [a, b)$ に対して次が成り立つ:

$$|V(t, x, y) - V(t, \hat{x}, \hat{y})| \leq L(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|).$$

$(V2)$ すべての $t \in [a, b),\ x \in \Omega(t)$ に対して $V(t, x, x) = 0$.

$n = 1, 2, \ldots$ に対して $t_n \in [a, b),\ (x_n, y_n) \in \Omega(t_n) \times \Omega(t_n)$ とする.

$(V3)$ もし $n \to \infty$ のとき $t_n \to t \in [a, b)$ かつ $(x_n, y_n) \to (x, y) \in \Omega(t) \times \Omega(t)$ ならば, $n \to \infty$ のとき $V(t, x, y) \leq \liminf_{n \to \infty} V(t_n, x_n, y_n)$ となる.

$(V4)$ もし $n \to \infty$ のとき $t_n \to t \in [a, b)$ かつ $V(t_n, x_n, y_n) \to 0$ ならば, $n \to \infty$ のとき $\|x_n - y_n\| \to 0$ となる.

(Ω1)–(Ω4) を仮定する. このとき, 初期値問題 (IVP; τ, z) の解の一意性や存在はそれぞれ次で示される.

定理 1 (解の一意性). $[\tau, c) \subset [a, b)$ かつ $i = 1, 2$ に対して $z_i \in \Omega(\tau)$ とする. 各 $i = 1, 2$ に対して u_i は (IVP; τ, z_i) の $[\tau, c)$ 上の解とする. このとき $t \in [\tau, c)$ に対して

$$V\big(t, u_1(t), u_2(t)\big) \leq \exp\Big(\int_\tau^t \omega(s) ds\Big) V(\tau, z_1, z_2).$$

特に $z_1 = z_2$ ならば, $t \in [\tau, c)$ に対して $u_1(t) = u_2(t)$.

定理 2 (局所解の存在). $(\tau, z) \in \Omega$ とする. R と M は正の数で $\tau + R < b$ かつ $|s - \tau| < R$ と $\|y - z\| < R$ を満たす $(s, y) \in \Omega$ に対して $\|A(s, y)\| \leq M$ を満たすとする. $T \in (0, R/(M + 1)]$ とする. このとき (IVP; τ, z) の $[\tau, \tau + T]$ 上の一意解 u が存在して, $t, s \in [\tau, \tau + T]$ に対して $\|u(t) - u(s)\| \leq M|t - s|$ を満たす.

定理 3 (大域解の存在). C を Ω の連結成分とし, $c := \sup\{t \in [a, b) : C(t) \neq \emptyset\}$ とする. このとき各 $(\tau, z) \in C$ に対して (IVP; τ, z) の $[\tau, c)$ 上の一意解が存在して, 区間 $[\tau, c)$ は解が存在する最大区間である. 特に Ω が連結であるとき, $(\tau, z) \in \Omega$ に対して (IVP; τ, z) は一意な大域解をもつ.

図 1: Ω の連結成分 C と局所解

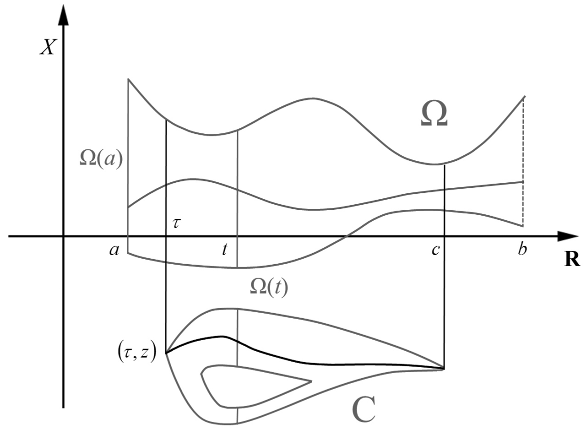
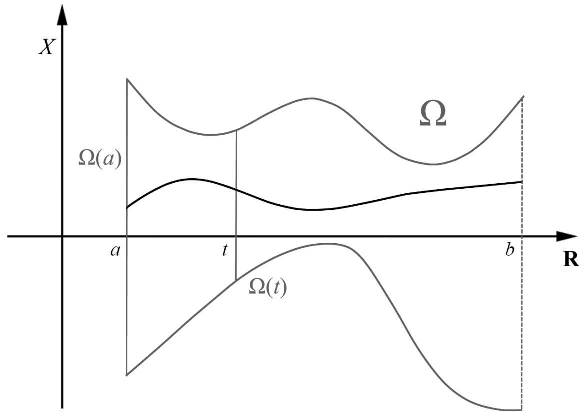


図 2: 自身が連結な Ω と大域解



3. 結果：準線形波動方程式の可解性

3.1. 部分集合 Ω

空間 $X = L^2(\boldsymbol{R}) \times L^2(\boldsymbol{R})$ とし，ノルムを $\|(u,v)\| := (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2)^{1/2}$ とする．$(u,v) \in H^2(\boldsymbol{R}) \times H^2(\boldsymbol{R})$ と $t \in [0,\infty)$ に対して汎関数 $H : [0,\infty) \times H^2(\boldsymbol{R}) \times H^2(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ を次で定義する:

$$
\begin{aligned}
H(t,u,v) := &\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^u \sigma(t,r)dr + \frac{1}{2}v^2 \right) dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_r(t,u)(\partial_x u)^2 + (\gamma u + \partial_x v)^2)dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_r(t,u)(\partial_x^2 u)^2 + (\gamma \partial_x u + \partial_x^2 v)^2)dx.
\end{aligned}
$$

このとき定数 $C_0 \geq c_0 > 0$ が存在して，$(u,v) \in H^2(\boldsymbol{R}) \times H^2(\boldsymbol{R})$ と $t \in [0,\infty)$ に対して

$$
c_0 \|(u,v)\|_{H^2 \times H^2}^2 \leq H(t,u,v) \leq C_0 \|(u,v)\|_{H^2 \times H^2}^2
$$

を満たす．また $(t,u,v) \in [0,\infty) \times H^2(\boldsymbol{R}) \times H^2(\boldsymbol{R})$ に対して汎関数 $\hat{H} : [0,\infty) \times H^2(\boldsymbol{R}) \times H^2(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ を次で定義する:

$$
\hat{H}(t,u,v) := \exp\left(-\frac{1}{c_0}\int_0^t h(s)ds \right) H(t,u,v).
$$

初期値問題 (IVP; $0, (u_0, v_0)$) に対して γ と $\sigma(\cdot,\cdot)$ のみに依存する連続な非減少関数 $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が存在して，$g(0) = 0$ かつ「ある条件」を満たす．ここで小さい数 $R_0 > 0$ を次を満たすようにとる:

$$
\text{もし } r \geq 0 \text{ かつ } r^2 \leq \frac{R_0}{c_0}\exp\left(\frac{1}{c_0}\int_0^\infty h(s)ds \right) \text{ ならば } g(r) < \gamma\delta_0.
$$

このとき部分集合 $\Omega \subset [0,\infty) \times X$ を次で定義する:

$$
\Omega := \{ \big(t,(u,v)\big) \in [0,\infty) \times \big(H^2(\boldsymbol{R}) \times H^2(\boldsymbol{R})\big) : \hat{H}(t,u,v) \leq R_0 \}.
$$

3.2. 汎関数 $V(t,\cdot,\cdot)$

汎関数 V を次で定義する: $(u,v),(\hat{u},\hat{v})\in X$ と $t\in[0,\infty)$ に対して

$$V\big(t,(u,v),(\hat{u},\hat{v})\big) := \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\big(\hat{v}-v\big)^2 dx + \Big(\int_u^{\hat{u}}\sqrt{\sigma_r(t,r)}dr\Big)^2 dx\right\}^{1/2}.$$

これは性質 $(V1)$–$(V4)$ を満たす. 特に各 $t\in[0,\infty)$ に対して $V(t,\cdot,\cdot)$ は X 上の距離であり, $(u,v),(\hat{u},\hat{v})\in X$ に対して

$$\min\{1,\sqrt{\delta_0}\}\|(u,v)-(\hat{u},\hat{v})\| \le V\big(t,(u,v),(\hat{u},\hat{v})\big) \le \max\{1,\sqrt{L_0}\}\|(u,v)-(\hat{u},\hat{v})\|.$$

3.3. (IVP; $0,(u_0,v_0)$) の可解性

$\big(t,(u,v)\big)\in\Omega$ に対して

$$A\big(t,(u,v)\big) := (\partial_x v, \partial_x\sigma(t,u)-\gamma v)$$

と定義する. このとき $A:\Omega\to X$ は条件 $(\Omega 1)$–$(\Omega 4)$ を満たす. 定理 1, 定理 2 と定理 3 より, 初期値問題 (IVP; $0,(u_0,v_0)$) は (u_0,v_0) が小さいときに一意的な大域解を持つ. さらに次の補題が得られる:

補題 1 (準波動方程式の可解性)**.** $\|(u_0,v_0)\|_{H^2\times H^2}\le\sqrt{R_0/C_0}$ を満たす任意の $(u_0,v_0)\in H^2(\boldsymbol{R})\times H^2(\boldsymbol{R})$ に対して (IVP; $0,(u_0,v_0)$) の一意的な大域解 $\big(u(\cdot),v(\cdot)\big)$ が存在して,

$$\big(u(\cdot),v(\cdot)\big)\in C^1\big(0,\infty;L^2(\boldsymbol{R})\times L^2(\boldsymbol{R})\big)\cap L^\infty\big(0,\infty;H^2(\boldsymbol{R})\times H^2(\boldsymbol{R})\big).$$

参考文献

[1] T. Iwamiya, *Global existence of solutions to nonautonomous differential equations in Banach spaces*, Hiroshima Math. J., **13** (1983), no. 1, 65–81.

[2] S. Kato, *Some remarks on nonlinear ordinary differential equations in a Banach space*, Nonlinear Anal., **5** (1981), no. 1, 81–93.

[3] N. Kenmochi and T. Takahashi, *Nonautonomous differential equations in Banach spaces*, Nonlinear Anal., Theory, Methods & Applications, **4** (1980), no. 6, 1109–1121.

[4] Y. Kobayashi and N. Tanaka, *Semigroups of Lipschitz operators*, Adv. Defferential Equations, **6** (2001), no. 5, 613–640.

[5] Y. Kobayashi, N. Tanaka and Y. Tomizawa, *Nonautonomous differential equations and Lipschitz evolution operators in Banach spaces*, submitted.

[6] V. Lakshmikantham, A. R. Mitchell and R. W. Mitchell, *Differential equations on closed subsets of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc., **220** (1976), 103–113.

[7] R. H. Martin Jr., *Differential equations on closed subsets of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc., **179** (1973), 399–414.

[8] A. Matsumura, *Global existence and asymptotics of the solutions of the second-order quasilinear hyperbolic equations with the first-order dissipation*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **13** (1977), no. 2, 349–379.

[9] H. Murakami, *On non-linear ordinary and evolution equations*, Funkcial. Ekvac., **9** (1966), 151–162.