

時間作用素について

寺西 功哲

1 始めに

ここでは Hilbert 空間 \mathcal{H} とその上の自己共役作用素 H に対して、 \mathcal{H} 上の対称作用素 T で、ある部分空間 $D \subseteq \mathcal{H}$ 上に於いて

$$[T, H] := (TH - HT) = \sqrt{-1} \quad (1.1)$$

を満たすものが存在するかを議論する。 H を系のエネルギーを表現する Hamiltonian だと思えば、 H に対して正準交換関係と不確定性関係を満たす T は物理的に時間を表す作用素だと思う事が出来る為、このような作用素 T は時間作用素と呼ばれる事がある。時間作用素に関しては [新井 06] に少し関連した記述があるので、そこでの議論も参照して戴きたい。

2 準備

先ず、必要な用語と記法の確認をしておく。内積が定義されている線形空間 V が内積から誘導される自然な距離位相に関して完備であるとき、 V を Hilbert 空間と呼ぶ。以下、係数体は複素数とし、複素 Hilbert 空間を \mathcal{H} で表す事とする。今回の議論に於いては、特に断らない限り Hilbert 空間は無限次元としておく。よく知られているように、可分（可算個の点からなる稠密な部分空間が存在するよう）な無限次元 Hilbert 空間は全て二乗可積分空間 $L^2(\mathbb{R})$ と同型であり、位相空間としては $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と同相である。

\mathcal{H} の中の線形部分空間 D から \mathcal{H} への線形写像の事を \mathcal{H} 上の（線形）作用素と云う。Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の線形作用素 A に対して、 A の定義域を $D(A)$ 、スペクトルを $\sigma(A)$ 、点スペクトル（ A の固有値全体からなる集合）を $\sigma_p(A)$ と書く事にする。 \mathcal{H} 上の作用素 A に対して、 A の作用素ノルム $\|A\|$ を

$$\|A\| := \sup_{\psi \in D(A) \setminus \{0\}} \frac{\|A\psi\|}{\|\psi\|}$$

と定める。 $\|A\| < \infty$ となる作用素を有界作用素と云い、そうでないものを非有界作用素と云う。有界線形作用素の定義域は基本的に Hilbert 空間全体に拡張することが可能なので非有界線形作用素の定義域は常に \mathcal{H} としておく。また、非有界作用素は定義域を全体に拡張する事は出来ないが、その内で興味があるのは定義域が稠密なもののみであるので、ここでは作用素 A の定義域 $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ は稠密としておく。

作用素 A の共役作用素 A^* を

$$D(A^*) := \{\psi \in \mathcal{H} \mid \text{ある } \psi' \in \mathcal{H} \text{ が存在して, 任意の } \phi \in D(A) \text{ に対して } \langle \psi, A\phi \rangle = \langle \psi', \phi \rangle\}$$
$$A^*\psi := \psi'$$

と定める. A^* が A の拡張となるとき, 即ち,

$$D(A) \subseteq D(A^*) \text{ かつ } A\psi = A^*\psi \quad (\forall \psi \in D(A))$$

となるとき, A を対称作用素と云う. 対称作用素の中で, 特に $A = A^*$ となるものを自己共役作用素と云う. これはエルミート行列に相当するものでありスペクトル $\sigma(A)$ が実数の部分集合になる事で特徴づけられる. 紙数の都合上, 詳細については [新江 99a][黒田 80] 等を参照して戴きたい.

3 時間作用素

定義 3.1. 対称作用素 T が自己共役作用素 H の時間作用素であるとは, $\{0\}$ と異なる (稠密とは限らない) ある線形部分空間 $D \subseteq D(TH) \cap D(HT)$ が存在し, D 上で次の正準交換関係 (CCR) を満たす事である.

$$TH - HT = \sqrt{-1},$$

つまり, 任意の $\psi \in D$ に対して $[T, H]\psi = \sqrt{-1}\psi$ が成立する事である.

正準交換系を満たす作用素の性質として, 次の定理がよく知られている (詳しくは [新江 99b, 定理 3.24] を参照の事)

定理 3.2. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, A, B を Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の作用素で, 稠密な部分空間 $D \subseteq D(AB) \cap D(BA)$ 上で交換関係

$$[A, B] = \lambda$$

を満たすものとする. このとき, A, B の少なくとも一方は非有界である.

有限次元線形空間上の線形写像は全て有界である為, 上記の定理から有限次元線形空間を考えた場合, 稠密な線形部分空間上で CCR を満たす作用素は存在しない. 従って, CCR を考える際は基本的に無限次元の Hilbert 空間を扱う必要があり, 少なくとも一方の作用素は非有界となる.

さて, 先ずは自己共役作用素に対して時間作用素が存在するかが気になるところである. しかし, この問には CCR が成立する部分空間 D に稠密性を課さなければ凡そ肯定的に答える事が出来る.

定理 3.3. H を Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の自己共役作用素とする. もし H が定義域 $D(H)$ 上で定数でなければ, H に対する時間作用素 T が存在して, ある部分空間 D 上で式 (1.1) を満たす.

この定理から時間作用素は殆んどの場合に存在するのだが、この定理で構成される時間作用素はあまり良いものではない。従って、CCR の条件が成立する部分空間 D は稠密か余次元が有限なものとしておいた方がよいかもれない。上記の定理に於いて部分空間 D は稠密である必要が無かった為に、いつでも時間作用素が存在するのだが、 D が稠密である場合はそれほど簡単ではない。スペクトルが離散固有値のみの場合は次の定理が知られている。

定理 3.4. [AM08]

H を Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の自己共役作用素で次の仮定を満たすとする。

(H.1) H は正の作用素で、そのスペクトルは全て単純離散固有値である。

(H.2) $\sigma(H) = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表せるが、このとき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{E_n^2} < \infty$ 。

このとき、ある稠密な部分空間 D 上で正準交換関係 (1.1) を満たす H の時間作用素 T が存在する。

この定理から次の定理を導く事が出来る。

定理 3.5. H を Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の非有界自己共役作用素とする。もし、 H のスペクトルが固有値のみかつ、重複度を込めて可算個、即ち、 $\sigma(H) = \sigma_p(H)$, $|\sigma(H)| \leq \aleph_0$ かつ、任意の $\lambda \in \sigma(H)$ に対して $\dim \ker(H - \lambda) \leq \aleph_0$ ならば、ある稠密な部分空間 D 上で正準交換関係 (1.1) を満たす H に対する時間作用素 T が存在する。

可算個の固有値のみからなるスペクトルをもつ非有界作用素の場合には時間作用素が存在する事が分った。連続スペクトルがある場合は難しそうなので、次にスペクトルが固有値のみの有界作用素の場合に時間作用素が存在するかが気になるところである。この場合は次の定理により、時間作用素が存在しない事が部分的に示される。

定理 3.6. $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を互いに直行する Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の射影作用素の可算族、 $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R} の中の有界点列とする。このとき、次の条件を満たす $H := \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i P_i$ に対する対称作用素 T は存在しない。

- (1) $D \subseteq \mathcal{H}$ は T の芯である。
- (2) D 上で正準交換関係 (1.1) を満たす。
- (3) ある $i \in \mathbb{N}$ が存在して $P_i(D) \cap D(\overline{T}) \neq \{0\}$ 。

注 3.7. もしも H が射影作用素、又は $H(\mathcal{H})$ が有限次元ならば上記の定理に於ける条件 (3) $P_i(D) \cap D(\overline{T}) \neq \{0\}$ は必要ない事が容易に分る。しかし、この条件が外せるかどうかはよく分らない。

参考文献

- [AM08] A. Arai and Y. Matsuzawa. Time operators of a Hamiltonian with purely discrete spectrum. *Rev. Math. Phys.* **20** (2008), no. 8. 951–978.
- [新江 99a] 新井朝雄・江沢洋, 量子力学の数学的構造 I, 朝倉書店, 1999.
- [新江 99b] 新井朝雄・江沢洋, 量子力学の数学的構造 II, 朝倉書店, 1999.
- [新井 06] 新井朝雄, 量子現象の数理, 朝倉書店, 2006.
- [黒田 80] 黒田成俊, 関数解析, 共立出版, 1980.