

カスプ辺の平行曲面について

神戸大学大学院理学研究科
寺本 圭佑*

1 準備

まず, 以下の議論で必要となるものを定義していく. ここに現れる内容の詳細については, [1, 3, 5, 7]などを参照されたい.

$f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ を C^∞ 写像とする ($0 \in U \subset \mathbf{R}^2$ を領域とする). このとき, f が波面であるとは, f に沿う単位ベクトル場 ν で, $L = (f, \nu): U \rightarrow T_1\mathbf{R}^3$ がルジャンドルはめ込みとなるものが存在するときをいう. ここで, $T_1\mathbf{R}^3$ は標準接触構造を持つ \mathbf{R}^3 の単位接束である. 波面は一般に特異点を持つことに注意する. 波面 f に対して, C^∞ 関数 $\lambda: U \rightarrow \mathbf{R}$ を $\lambda(u, v) = \det(f_u, f_v, \nu)(u, v)$ で定め, 符号付面積密度関数という. 点 $p \in U$ が $\lambda(p) = 0$ を満たすとき, p を波面 f の特異点といい, 特異点集合を $S(f)$ と表す. 点 $p \in S(f)$ が非退化であるとは, $d\lambda(p) \neq 0$ が成り立つときをいう. 点 $p \in S(f)$ が非退化であるとき, $S(f)$ 上で $df(\eta) = 0$ を満たすベクトル場 η が存在し, これをナルベクトル場と呼ぶ. 波面にジェネリックに現れる特異点にはカスプ辺とツバメの尾がある ([1]). これらは, 次の写像に原点で \mathcal{A} -同値なものをいう:

$$\begin{aligned}(u, v) &\mapsto (u, v^2, v^3) \text{ カスプ辺,} \\ (u, v) &\mapsto (u, 3v^4 + uv^2, 4v^3 + 2uv) \text{ ツバメの尾.}\end{aligned}$$

ここで, 2 つの写像芽 $f, g: (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ が \mathcal{A} -同値であるとは, 値域の微分同相写像芽 $S: (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0)$ と像域の微分同相写像芽 $T: (\mathbf{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ が存在し, $T \circ f = g \circ S$ を満たすときをいう. これらの特異点に対して, 以下の判定法が知られている.

Theorem 1.1 ([3]). $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面とし, 原点が特異点であるとする.

(1) f が原点でカスプ辺であるための必要十分条件は, 原点において $d\lambda(\eta) \neq 0$ が成立することである. 特に, カスプ辺において, 特異方向とナル方向は横断的である.

(2) f が原点においてツバメの尾であるための必要十分条件は, $d\lambda(0) \neq 0$, $\eta\lambda(0) = 0$ かつ $\eta\eta\lambda(0) \neq 0$ が成り立つことである.

2 カスプ辺

$f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ をカスプ辺とする. このとき, 次が成り立つ.

*teramoto@math.kobe-u.ac.jp

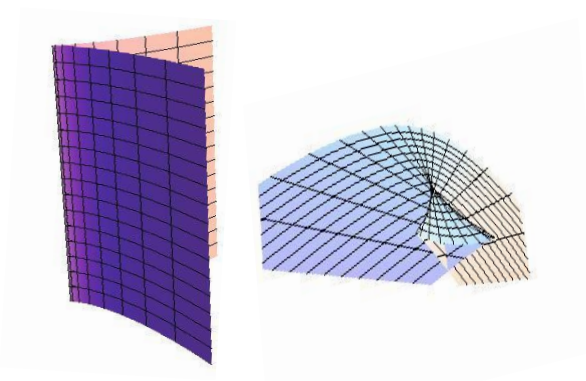


Figure 1: カスプ辺 (左側) とツバメの尾 (右側).

Proposition 2.1 ([4]). $f : (U; u, v) \rightarrow \mathbb{R}^3$ カスプ辺とする. このとき, 値域の座標変換と像域の等長変換を用いて

$$f(u, v) = \left(u, \frac{a_{20}}{2}u^2 + \frac{a_{30}}{6}u^3 + \frac{v^2}{2}, \frac{b_{20}}{2}u^2 + \frac{b_{30}}{6}u^3 + \frac{b_{12}}{2}uv^2 + \frac{b_{03}}{6}v^3 \right) + h(u, v), \quad (2.1)$$

$(b_{20} \geq 0, b_{03} \neq 0)$

と表すことができる. ここで,

$$h(u, v) = (0, u^4h_1(u), u^4h_2(u) + u^2v^2h_3(u) + uv^3h_4(u) + v^4h_5(u, v)),$$

であり, $h_i(u)$ ($1 \leq i \leq 4$), $h_5(u, v)$ は C^∞ 関数である.

上の (2.1) をカスプ辺の標準形という (詳細は [4] を参照されたい). ここで, adapted 座標系と呼ばれる座標系を導入する.

Definition 2.1. U 上の座標系 (u, v) が *adapted* であるとは, これが次を満たすときをいう:

- (1) u -軸が特異曲線,
- (2) ∂_v が u -軸上のナルベクトル場を与える,
- (3) u -軸の他に特異点がない.

adapted 座標を用いて, 単位法ベクトル場 ν は, $\nu(u, v) = f_u \times \tilde{f}_v / |f_u \times \tilde{f}_v|(u, v)$ で与えられる. ここで, $\tilde{f}_v = f_v/v$ とする.

Remark 2.1. (u, v) を U 上の adapted 座標とすると, $\{f_u, \tilde{f}_v, \nu\}$ は一次独立である. さらに, $f_{vv} = \tilde{f}_v$ on $S(f) = \{v = 0\}$ が成立する.

adapted 座標系を用いて次を導入する.

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \langle f_u, f_u \rangle, \quad \tilde{F} = \langle f_u, \tilde{f}_v \rangle, \quad \tilde{G} = \langle \tilde{f}_v, \tilde{f}_v \rangle, \\ \tilde{L} &= -\langle f_u, \nu_u \rangle, \quad \tilde{M} = -\langle \tilde{f}_v, \nu_u \rangle, \quad \tilde{N} = -\langle \tilde{f}_v, \nu_v \rangle, \end{aligned}$$

ここで, $\tilde{E} = 1, \tilde{F} = 0, \tilde{G} = 1, \tilde{L} = b_{20}, \tilde{M} = b_{12}, \tilde{N} = b_{03}/2$ at $(0, 0)$ である. 特に, $\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = 1$ at $(0, 0)$ なので, 原点の近傍で, 行列 $\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}$ は正則である. これらの量を用いて, 以下の関数を定める.

$$\tilde{\kappa}_1 := \frac{\tilde{A} + \tilde{B}}{2v(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{\kappa}_2 := \frac{\tilde{A} - \tilde{B}}{2v(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)} \quad (2.3)$$

ここで, $\tilde{A} = \tilde{E}\tilde{N} - 2v\tilde{F}\tilde{M} + v\tilde{G}\tilde{L}$, $\tilde{B} = \sqrt{(\tilde{E}\tilde{N} - 2v\tilde{F}\tilde{M} + v\tilde{G}\tilde{L})^2 - 4v(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)(\tilde{L}\tilde{N} - v\tilde{M}^2)}$. このとき, 以下を得る.

Proposition 2.2. 上の状況において, $S(f)$ 上で $\tilde{N} > 0$ (*resp.* < 0) のとき, $\tilde{\kappa}_2$ が収束 (*resp.* 発散) し, $\tilde{\kappa}_1$ は発散 (*resp.* 収束) する.

このことから, $\tilde{N} > 0$ のとき, $\tilde{\kappa}_2$ を主曲率と考えることができる. さらに, この主曲率に対する主方向を $\tilde{v} = (\tilde{N} - \tilde{\kappa}_2 v \tilde{G})\partial_u + (-\tilde{M} + \tilde{\kappa}_2 \tilde{F})\partial_v$ と取ることができる.

さて, 主曲率 $\tilde{\kappa}_2$ と対応する主方向 \tilde{v} を用いて, カスプ辺の峰点を定義する (正則曲面に対しては [2, 6] を参照).

Definition 2.2. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ をカスプ辺, $\tilde{\kappa}_2$ を主曲率, \tilde{v} を主曲率に対応する主方向とする. このとき, $f(p)$ が \tilde{v} についての峰点であるとは, $\tilde{v}\tilde{\kappa}_2(p) = 0$ が成り立つときをいう. ここで, $\tilde{v}\tilde{\kappa}_2(p)$ は, $\tilde{\kappa}_2$ の \tilde{v} についての方向微分である. さらに, $f(p)$ が \tilde{v} についての k 階峰点であるとは, $\tilde{v}^{(m)}\tilde{\kappa}_2(p) = 0$ ($1 \leq m \leq k$) であり, $\tilde{v}^{(k+1)}\tilde{\kappa}_2(p) \neq 0$ であるときをいう. ただし, $\tilde{v}^{(m)}\tilde{\kappa}_2(p)$ は, $\tilde{\kappa}_2$ の \tilde{v} についての m 階の方向微分である.

3 カスプ辺の平行曲面

カスプ辺を初期曲面としたときの平行曲面を考えていく. 正則曲面の平行曲面に現れる特異点と初期曲面の微分幾何学的性質については [2] において詳細に調べられていることを述べておく.

$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ をカスプ辺とし, この平行曲面 f_t を定数 $t \in \mathbb{R}$ を用いて

$$f_t(u, v) = f(u, v) + t\nu(u, v), \quad (3.1)$$

と定義する. 平行曲面に対する単位法ベクトル場としては, 初期曲面 f に対する単位法ベクトル場 ν がそのまま使える. いま, この平行曲面に対する判別関数 λ_t を

$$\lambda_t(u, v) = \det((f_t)_u, (f_t)_v, \nu)(u, v) \quad (3.2)$$

と定める. 原点において, $\lambda_t(\mathbf{0}) = -b_{03}t(1 - b_{20}t)/2$ であることから, $t = 0, 1/b_{20}$ であるときに特異点を持つ. ここで, $b_{20} = \tilde{\kappa}_2(\mathbf{0}) \neq 0$ であるとする. $t = 0$ は初期曲面であるので, 原点でカスプ辺となっている. そこで以下では $t = t_0 = 1/\tilde{\kappa}_2(\mathbf{0}) (= 1/b_{20})$ として考える. さらに, 平行曲面は波面であるので, 定理 1.1 を適用することができる. そのためには, 平行曲面 f_{t_0} に対するナルベクトル場 η_{t_0} が必要であるが, それは次のように求められる:

$$\eta_{t_0} = - \left(v + t_0 \frac{v\tilde{F}\tilde{M} - \tilde{E}\tilde{N}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \right) \partial_u + t_0 \frac{\tilde{F}\tilde{L} - \tilde{E}\tilde{M}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \partial_v. \quad (3.3)$$

定理 1.1 とナルベクトル場 η_{t_0} を用いて, 初期曲面の幾何学的性質と平行曲面に現れる特異点の関係を
得ることができる.

Theorem 3.1. $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ をカスプ辺とする. このとき, f の平行曲面 f_{t_0} , $t_0 = 1/\tilde{\kappa}_2(\mathbf{0})$ が,
原点においてツバメの尾特異点を持つための必要十分条件は, 原点が初期曲面 f の 1 階峰点であ
り, 平行曲面 f_{t_0} の非退化特異点になることである.

References

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, Vol.1, Monographs in Mathematics **82**, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [2] T. Fukui, and M. Hasegawa, Singularities of parallel surfaces, *Tohoku Math. J.* **64** (2012), 387–408.
- [3] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic space, *Pacific J. Math.* **221** (2005), 303–351.
- [4] L. F. Martins, and K. Saji, Geometric invariants of cuspidal edges, Preprint, 2013.
- [5] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, Behavior of Gaussian curvature around non-degenerate singular points on wave fronts, Preprint, 2013.
- [6] I. R. Porteous, *Geometric differentiation for the Intelligence of Curves and Surfaces*, second edition, Cambridge University Press, 2001.
- [7] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, The geometry of fronts, *Ann. of Math.* **169** (2009), 491–529.