Integrability in the geodesic flow for the Berger mertic

竹内 司　(東京理科大学大学院 理学研究科 D3)*

1. はじめに

Hamilton 関数 H により与えられる $2n$ 次元相空間の運動において，n 個の第 1 積分 $G_1 = H,\ G_2, \cdots, G_n$ があり，$\{G_i, G_j\} = 0$ かつ $\mathrm{grad}\, G_1,\ \mathrm{grad}\, G_2, \cdots, \mathrm{grad}\, G_n$ が 1 次独立であるとき，H を完全積分可能な Hamilton 関数と呼び，完全積分可能な Hamilton 関数により与えられる力学系を可積分系と呼ぶ (cf. [1])．可積分系の例としては，Kepler 問題，剛体，調和振動子などがよく知られている．古典力学における可積分系の特徴付けとして Liouville-Arnold の定理があるが，一方で S. De Filippo，G. Marmo，M. Salerno，G. Vilasi により可積分系の新たな特徴付けとして次の定理と定義が示されている．

定理 1 ([2])．偶数次元多様体 $\mathcal{M}$ 上のベクトル場 X が次の条件を満たす不変な $(1,1)$-*tensor field* T を持つとする：

(1) T の *Nijenhuis torsion* が消滅する．
(2) T が対角化可能で固有値が 2 重非退化である．
(3) 固有値は多様体上の停留点を持たない滑らかな関数である．

このとき，次が成立する：

1. ある *symplectic form* ω と *Hamilton* 関数 H が存在し，X は ω に関する H の *Hamiltonian vector field* となる．
2. X は *separable* である．
3. H は ω の *Poisson bracket* に関し完全積分可能である．

定義 1 ([2])．上記の定理における対角化可能で不変な $(1,1)$-*tensor field* T を $\mathcal{M}$ 上のベクトル場 X の *recursion operator* と呼ぶ．すなわち，T が X の *recursion operator* であるとき，次の条件を満足する．ただし，λ は T の固有値.

$$\mathcal{L}_X T = 0,\quad \mathcal{N}_T = 0,\quad \deg\lambda = 2,\quad (d\lambda)_p \neq 0, {}^\forall p \in \mathcal{M}.$$

また，recursion operator T の特徴として，$n = \dim \mathcal{M}/2$ としたとき，T の k 乗の各トレース $\mathrm{Tr}(T^k)$ $(1 \leq k \leq n)$ はそれぞれ互いに関数独立な保存量となることが知られている (例えば, [4], [5]).

先行研究ではいくつかの力学系に対し recursion operator が構成されている．しかし，これらの例は物理的な対象であり，数学的な考察はあまりされていなく，幾何学的な意味づけも十分にされてはいない.

本研究では，微分幾何学的な立場から，リーマン多様体の測地流に対し recursion operator を具体的に構成し，Hamilton 関数の完全積分可能性を示す．この測地流に対しての recursion operator の構成はこれまでの先行研究とは異なる新しい構成例である．また，Kepler 問題において，Marmo-Vilasi ([4]) で得られた recursion operator T とは異なる recursion operator T_0 を構成することで，特定のベクトル場に対し recursion operator が一意には定まらないことを具体的に示した.

2. Kepler 問題による Recursion operator の非一意性

$T^*(\mathbb{R}^3 - \{0\})$ 上の Kepler 問題におけるベクトル場 X は，極座標表示により

$$X = \frac{1}{m}\left[p_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{p_\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{p_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^3}\left({p_\theta}^2 + \frac{{p_\phi}^2}{\sin^2\theta}\right)\frac{\partial}{\partial p_r} + \frac{{p_\phi}^2\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}\frac{\partial}{\partial p_\theta}\right] - \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial p_r}$$

* 〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3　東京理科大学大学院 理学研究科
e-mail: `1112702@ed.tus.ac.jp`

で表される．ただし，k は中心力の強さを表し，m は中心力のもとで移動する物質の質量である．このとき，ベクトル場 X は自然な symplectic form ω を

$$\omega = dp_r \wedge dr + dp_\vartheta \wedge d\vartheta + dp_\varphi \wedge d\varphi$$

としたとき，Hamilton 関数

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\vartheta}\right) - \frac{k}{r}$$

に対し Hamiltonian vector field である．

2.1. Marmo-Vilasi ([4]) による構成

Marmo-Vilasi ([4]) は action-angle coordinate を用いて recursion operator を構成した．action-angle coordinate (J, φ) は，

$$\begin{aligned}
J_1 &= -\sqrt{{p_\theta}^2 + \frac{{p_\phi}^2}{\sin^2\theta}} + \sqrt{2}mk\left(\frac{2mk}{r} - \frac{{p_\theta}^2}{r^2} - \frac{{p_\phi}^2}{r^2\sin^2\theta} - {p_r}^2\right)^{-1/2}, \\
J_2 &= \sqrt{{p_\theta}^2 + \frac{{p_\phi}^2}{\sin^2\theta}} - p_\phi\,, \quad J_3 = p_\phi. \\
\varphi_1 &= -\frac{\{-m^2k^2r^2 + 2mkr(J_1+J_2+J_3)^2 - (J_1+J_2+J_3)^2(J_2+J_3)^2\}^{1/2}}{(J_1+J_2+J_3)^2} \\
&\qquad + \arcsin\frac{mkr - (J_1+J_2+J_3)^2}{(J_1+J_2+J_3)\sqrt{(J_1+J_2+J_3)^2 - (J_2+J_3)^2}}, \\
\varphi_2 &= \varphi_1 - \arcsin\frac{\{mkr - (J_2+J_3)^2\}(J_1+J_2+J_3)}{\sqrt{(J_1+J_2+J_3)^2 - (J_2+J_3)^2}} - \arcsin\frac{(J_2+J_3)\cos\theta}{\sqrt{(J_2+J_3)^2 - J_3^2}}, \\
\varphi_3 &= \varphi_2 + \arcsin\frac{J_3}{\sqrt{(J_2+J_3)^2 - J_3^2}\tan\theta}
\end{aligned}$$

であり，上記の X，ω，H は

$$\begin{aligned}
X &= \frac{2mk^2}{(J_1+J_2+J_3)^3}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \frac{\partial}{\partial\varphi_3}\right), \\
\omega &= \sum_h dJ_h \wedge d\varphi_h, \qquad H = -\frac{mk^2}{(J_1+J_2+J_3)^2}.
\end{aligned}$$

ここで，対角化可能な $(1,1)$-tensor field T を

$$T = \sum_{h,k}\left(({}^t\mathcal{S})^h{}_k \frac{\partial}{\partial J_h} \otimes dJ_k + \mathcal{S}^h{}_k \frac{\partial}{\partial\varphi_h} \otimes d\varphi_k\right) \tag{1}$$

とおけば，$\mathcal{L}_X T = 0$，$\mathcal{N}_T = 0$ を満足し，recursion operator であることが得られる．ただし，

$${}^t\mathcal{S} = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 - J_3 & J_3 - J_2 \\ J_2 & J_1 + J_3 & J_2 \\ J_3 & J_3 & J_1 + J_2 \end{pmatrix}.$$

2.2. 先行研究と異なる構成

Marmo-Vilasi ([4]) と異なる recursion operator をスケーリングされた Runge-Lenz-Pauli ベクトルを用いて構成する．スケーリングされた Runge-Lenz-Pauli ベクトル D は

$$D = \frac{1}{\sqrt{-2mH}}\left\{p \times L - mk\frac{q}{r}\right\}.$$

ただし，p は運動量ベクトル，q は位置ベクトル，$L = q \times p$ は角運動量ベクトル，H は非正値関数である．ここで，l_i を L の各成分，D_i を D の各成分とし，

$$P_1 = \sqrt{\frac{m}{-H}}, \quad P_2 = {D_1}^2 + {D_2}^2 + {D_3}^2, \quad P_3 = l_3$$

とおけば,

$$\{P_i, P_j\} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

が成り立つ．これより,

$$\omega = dP_1 \wedge d\alpha_1 + dP_2 \wedge d\alpha_2 + dP_3 \wedge d\alpha_3$$

となる α_1，α_2，α_3 が存在する．このとき，ベクトル場 X は $X = \dfrac{2m}{{P_1}^3}\dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}$ となり,

$$T_0 = \sum_{i=1}^{3} \widetilde{\mathcal{S}^i}_i \left(\frac{\partial}{\partial P_i} \otimes dP_i + \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \otimes d\alpha_i\right), \quad \widetilde{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\mathcal{L}_X T_0 = 0$，$\mathcal{N}_{T_0} = 0$ より T_0 は recursion operator となる．

ここで，先行研究で得られた (1) の recursion operator を座標系 (P, α) により表現すれば,

$$T = \sum_{i,j=1}^{3}\left(\mathcal{A}^i{}_j \frac{\partial}{\partial P_i} \otimes dP_j + \mathcal{B}^i{}_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \otimes dP_j + \mathcal{C}^i{}_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \otimes d\alpha_j\right).$$

ただし，$\mathcal{A}^i{}_j = \displaystyle\sum_{h,k=1}^{3} ({}^t\mathcal{S})^h{}_k \frac{\partial P_i}{\partial J_h}\frac{\partial J_k}{\partial P_j}$，$\mathcal{B}^i{}_j = \displaystyle\sum_{h,k=1}^{3}\left(({}^t\mathcal{S})^h{}_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial J_h}\frac{\partial J_k}{\partial P_j} + \mathcal{S}^h{}_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varphi_h}\frac{\partial \varphi_k}{\partial P_j}\right)$，$\mathcal{C}^i{}_j = \displaystyle\sum_{h,k=1}^{3} \mathcal{S}^h{}_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varphi_h}\frac{\partial \varphi_k}{\partial \alpha_j}$ であり，特に $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} kP_1 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}^2{}_1 & \mathcal{A}^2{}_2 & \mathcal{A}^2{}_3 \\ kP_3 & 0 & 2P_3 - kP_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}^2{}_1 = k\left\{\sqrt{\frac{k^2{P_1}^2}{2} - P_2}\left(2kP_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2{P_1}^2}{2} - P_2}\right) - 2kP_1P_3\right\},$$

$$\mathcal{A}^2{}_2 = kP_1 - 2\sqrt{\frac{k^2{P_1}^2}{2} - P_2} + 2P_3,$$

$$\mathcal{A}^2{}_3 = 4\sqrt{\frac{k^2{P_1}^2}{2} - P_2}\left(2P_3 - \sqrt{\frac{k^2{P_1}^2}{2} - P_2}\right).$$

以上により，[4] と異なる recursion operator T_0 が得られた．したがって，特定のベクトル場に対する recursion operator の非一意性が得られた．

3. Berger metricの測地流のHamilton関数に対する構成

[3] により，Berger metric が

$$g(v,w) = \langle v,w\rangle + \beta\,\langle v,iz\rangle\,\langle w,iz\rangle\,,\quad \beta > -1$$

で定義されており，$z=(z_1,z_2)\in S^3$，$v=(v_1,v_2)$，$w=(w_1,w_2)\in T_zS^3$, $\langle v,w\rangle = \mathrm{Re}(v\cdot\overline{w})$ である．本研究では，g の測地流の Hamilton 関数を不変にする Hamiltonian G-action について考察し，その moment map を用いて g の測地流に対する recursion operator を構成する．具体的には，Hamilton 関数

$$H = \alpha\,\langle X,X\rangle + \beta\,\langle X,iz\rangle^2$$

に対し，以下のように τ と σ を取れば H と互いに可換な Poisson bracket が得られる：

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{2}\left\{\alpha\,\langle (X_1,-X_2),iz\rangle + \beta(|z_1|^2-|z_2|^2)\,\langle X,iz\rangle\right\},\\ \sigma &= \frac{1}{2}\alpha(-\overline{X_1}z_2 + X_2\overline{z_1}) + i\beta\overline{z_1}z_2\,\langle X,iz\rangle\,.\end{aligned}$$

ただし，$\tau\in\mathbb{R}$，$\sigma\in\mathbb{C}$ であり，これらは moment map の構成により得られた関数である．しかし，$\{\tau,\sigma\}$ は 0 でない．そこで新たな関数 κ を

$$\kappa = \tau^2 + \mathrm{Re}(\sigma)^2 + \mathrm{Im}(\sigma)^2$$

と定めることで

$$\{H,\tau\}=0,\ \ \{H,\kappa\}=0,\ \ \{\tau,\kappa\}=0$$

が得られる．これより，対角化可能で不変な $(1,1)$-tensor field T を

$$T = \begin{pmatrix}\mathcal{S} & 0\\ 0 & \mathcal{S}\end{pmatrix},\quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix}H & 0 & 0\\ 0 & \tau & 0\\ 0 & 0 & \kappa\end{pmatrix}$$

とおけば，$\mathcal{L}_XT=0$，$\mathcal{N}_T=0$ より T は recursion operator となる．以上により，Berger metric から得られる Hamilton 関数における可積分性が得られた．

参考文献

[1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mechanics **60**, Springer, New York 1978.

[2] S. De Filippo, G. Marmo, M. Salerno and G. Vilasi, *A New Characterization of Completely Integrable Systems*, Nuovo Cimento B **83** (1984) 97–112.

[3] K. Kikuchi, *S^1-Equivariant CMC Surfaces in the Berger Sphere and the Corresponding Lagrangians*, Advances in Pure Mathematics **3** (2013) 259–263.

[4] G. Marmo and G. Vilasi, *When Do Recursion Operators Generate New Conservation Laws?*, Phys. Lett. B **277** (1992) 137–140.

[5] G. Vilasi, *Hamiltonian Dynamics*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.