On the WKB theoretic structure of a Schrödinger operator with a Stokes curve of loop type

高橋　甫宗　(近畿大総合理工)

1. はじめに

次の1次元定常的Schrödinger方程式を考える．

$$\Big(-\frac{d^2}{dx^2}+\eta^2 Q(x,\eta)\Big)\psi(x,\eta)=0 \tag{1}$$

ここで，ηはラージパラメータであり，$Q(x,\eta)=Q_0(x)+\eta^{-1}Q_1(x)+\cdots+\eta^{-n}Q_n(x)$とする．各$Q_i(x)$はリーマン球面上のある開集合で定義された有理型関数である．完全WKB解析はこのように，大きなパラメータを含んだ微分方程式の大域解析を行うための有効な手段の一つであり，ここ30年ほどのうちに急速な発展を遂げてきた[KT]．これまでの具体的な結果としては，超幾何微分方程式のパラメータについての解の漸近挙動や古典的手法では不可能であった2階Fuchs型微分方程式のモノドロミー行列の計算が可能なものになったことなどが挙げられる．これらの結果を支えているのが「微分方程式の標準形への変換理論」である（以下では単に変換論という）．完全WKB解析は次節に現れるWKB解と呼ばれる形式解とBorel総和法を組み合わせることで，真の解の情報を引き出すというものであるが，そのためにはBorel和が意味をもたない場所（Borel変換の特異点）を見極めなければならない．ポテンシャル$Q(x,\eta)$がある仮定をみたしているとき，そのWKB解のBorel変換の特異点の位置は一目でわかるものではないが，変換論と超局所解析の組み合わせによって標準形と呼ばれる方程式のBorel変換を観察すればよいことになる．次節以降ではStokes曲線（これもまた後に定義される）がループを描く場合において，ループを含むある単連結領域における変換論がテーマとなる．なお，本研究は京都大学数理解析研究所の岩木耕平氏および近畿大学の青木貴史氏との共同研究に含まれる．

2. 準備

2.1. WKB解

方程式(1)において，$S(x,\eta)=\psi'/\psi$とおいて変換することで次のRiccati方程式が得られる：

$$\frac{dS}{dx}+S^2=\eta^2 Q(x,\eta)$$

この方程式の形式解を$S=\sum_{j=-1}^{\infty}\eta^{-j}S_j$の形で探す．そして得られた$\eta^{-1}$に関する形式的べき級数解をさらに変形し直すことで

$$\psi_{\pm}=\frac{1}{\sqrt{S_{\mathrm{odd}}}}\exp(\pm\int_a^x S_{\mathrm{odd}}dx)$$

という表示を得る．ただし，S_{odd}は形式解のηについての奇数次部分である．この形式解のことをWKB解と呼ぶ．ここでaは$Q_0(x)$の1位の零点である．完全WKB解析ではこの零点のことを「単純変わり点」と呼ぶ．注意すべきは，このWKB解は一般に発散級数ということである．そこで，解析的解での議論をするために次のBorel総和法を用いる．

2.2. Borel 総和法

定義　α を $\alpha \notin \{0, -1, -2, \cdots\}$ をみたす実数とするとき，$z > 0$ に対する次の形の（z^{-1} に関する）形式級数

$$f = \exp(\zeta_0 z) \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-\alpha-i} \tag{2}$$

(ζ_0, f_i は定数) に対して，その Borel 変換 $f_B(\zeta)$ を次式で定義する．

$$f_B(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{\Gamma(\alpha+i)} (\zeta+\zeta_0)^{\alpha+i} \tag{3}$$

ただし，Γ はガンマ関数．さらに次の Laplace 積分

$$\int_{-\zeta_0}^{\infty} \exp(-\zeta z) f_B(\zeta) d\zeta \tag{4}$$

が意味をもつとき，この積分を形式級数 f の Borel 和と呼ぶ．さらに f_i に対して定数 C, A が存在して $|f_i| \leq i! C^i A$ が成り立ち (Borel 変換可能性)，Borel 変換 f_B が ζ 平面内の $\{\zeta \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(\zeta+\zeta_0) = 0, \mathrm{Re}(\zeta+\zeta_0) > 0\}$ を含む領域に解析接続でき，積分 (**??**) が十分大きな z に対して意味をもつとき，f は Borel 総和可能であるという．

WKB 解の場合を考えてみる．まず上で定義した WKB 解 ψ は

$$\psi_\pm = \exp(\pm a(x)\eta) \sum_{i \geq -1} g_i(x) \eta^{-i-\frac{1}{2}}$$

という形に表現されることに注意すれば，その Borel 変換及び Borel 和は次のようになる：

$$\psi_{\pm,B} = \sum_{i \geq 0} \frac{g_i(x)}{\Gamma(i+\frac{1}{2})} (y \pm a(x))^{i-\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{\psi_\pm} = \int_{\mp a(x)}^{\infty} \exp(-y\eta) \psi_{\pm,B} dy$$

ここで，$a(x) = \int_a^x \sqrt{Q_0(x)} dx$ である．これらは上述の Borel 総和法の定義において $\zeta = y$，$\zeta_0 = \pm a(x)$，$\alpha = 1/2$，$f_i = g_i(x)$ であると思えばよい．この Borel 和は方程式 (1) の解析的解を与えている．この Borel 和が定義できるのはどのようなときか，その考察には次の Stokes 曲線の概念が必要である．

2.3. Stokes 曲線

定義　　Stokes 曲線とは方程式

$$\mathrm{Im} \int_a^x \sqrt{Q_0(x)} dx = 0$$

によって表される曲線である．

Stokes 曲線は各変わり点から 3 本発生し，変わり点どうしをつなぐ場合に「Stokes 曲線が退化する」という．例えば $Q(x) = x$ のときの Stokes 曲線は変わり点が原点で，そこから等間隔に 3 本の半直線が出る（図 1).

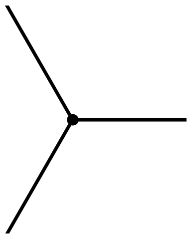

図 1

先程の Borel 和は Stokes 曲線が非退化で，変わり点が全て単純なときに各 Stokes 曲線で区切られた各々の領域 (Stokes 領域という) で Borel 総和可能である [V].

3. 標準形への変換理論

ここでは，方程式 (1) の代わりに独立変数を $\tilde{x}$ とした

$$\Big(-\frac{d^2}{d\tilde{x}^2}+\eta^2 Q(\tilde{x},\eta)\Big)\tilde{\psi}(\tilde{x},\eta)=0 \tag{5}$$

という方程式を考える．ただし，$Q(\tilde{x})=Q_0(\tilde{x})+\eta^{-1}Q_1(\tilde{x})+\cdots+\eta^{-n}Q_n(\tilde{x})$ であるとし，さらに以下の仮定をみたすものとする：

- $Q_i(\tilde{x})(0\leq i\leq n)$ はある原点を含む開集合 U で定義された有理型関数である
- $Q_0(\tilde{x})$ は原点に十分近い点 $p_0\in U$ を単純変わり点にもつ
- $Q_0(\tilde{x})$ は原点に 2 位の極を持ち $Q_i(\tilde{x})(i\geq 1)$ は原点を高々2 位の極にもつ
- U において $Q_0(\tilde{x})$ は他の極や零点を持たない
- $\sqrt{Q_0}$ の原点における留数は純虚数である

これらの仮定のもとでは，方程式 (??) の Stokes 曲線は変わり点から発生し，原点を迂回して再び変わり点に戻ってくるようなループの形を描く (図 2).

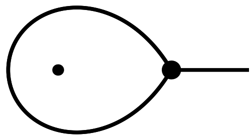

図 2

このループ部分を含む十分小さな円環状領域での変換は既に構成されている [Ta]．この主結果は，上述のようなループ型の Stokes 曲線が生じているような方程式 (??) の WKB 解は，以下の変形 Bessel 方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+\eta^2\frac{x+c}{4x^2}\right)\varphi(x,\eta)=0 \tag{6}$$

の WKB 解とループ型の Stokes 曲線を含むある円環領域上で定義された（ある形式級数により与えられる）変数変換で移りあうことであった (この (??) を (??) の標準形と

呼ぶ）．さらにこれに加えて我々は [Ta] の結果を改良し，円環領域だけでなく，ループ型 Stokes 曲線の内部を含む単連結領域全体での変換を構成することに成功した [AIT]．

定理　上述の仮定のもとで，ループ型 Stokes 曲線とその内側の領域を含むある単連結領域 U，および U 上の正則函数を係数とする Borel 変換可能な形式級数 $x(\tilde{x},\eta) = \sum_{j\geq 0} x_j(\tilde{x})\eta^{-j}$ が存在し，次が成り立つ：

$$\tilde{\psi}_{\pm}(\tilde{x},\eta) = \left(\frac{\partial x(\tilde{x},\eta)}{\partial \tilde{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} \varphi_{\pm}(x(\tilde{x},\eta),\eta)$$

ここで，$\tilde{\psi}_{\pm}(\tilde{x},\eta)$ は上述の変わり点で正規化された (**??**) の WKB 解，$\varphi_{\pm}(x,\eta)$ は同様に変わり点で正規化された (**??**) の WKB 解である．ただし，c は複素定数であり，

$$c = \frac{1}{4\pi^2}\Big(\int_{\gamma} \sqrt{Q_0(\tilde{x})}d\tilde{x}\Big)^2$$

という形で定められる．ここで，γ は U に含まれる原点を反時計回りに回る閉曲線である．

この定理と Voros 係数の Borel 和の解析，超局所微分作用素などを用いることで一般的な方程式 (**??**) の WKB 解 $\tilde{\psi}_{\pm}$ の Borel 変換の特異点情報が標準形である (**??**) のそれを観察することで得られるのである．

参考文献

[AIT] Aoki. T, Iwaki. K, and Takahashi. T, Exact WKB analysis of Schrödinger equations with a Stokes curve of loop type. in preparation.

[KT] Kawai, T. and Takei, Y., Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory,Translation of Mathematical Monographs, vol. 227, AMS, 2005.

[Ta] Takahashi. T, On the WKB theoretic structure of a Schrödinger operator with a Stokes curve of loop type. to appear.

[T] Takei Y., Sato's conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B10** (2008), 205-224.

[V] Voros, A., The return of the quartic oscillator, The complex WKB method, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **39** (1983), 211-338.