On the modified Futaki invariant of complete intersections in projective spaces

高橋　良輔　(名古屋大学　多元数理科学研究科)*

1. 導入

コンパクト複素多様体 M 上の Kähler 計量 ω が **Kähler-Einstein** (KE) **計量**であるとは，ある定数 c が存在して，関係式 $\mathrm{Ric}(\omega) = c\omega$ を満たすことである．c は計量を正規化することで $c = -1, 0, 1$ として構わない．KE 計量が存在するためには，$c_1(M)$ がそれぞれ負定値，零，正定値の実 $(1,1)$ 型の形式で代表される必要がある．この条件を単に $c_1(M) < 0$，$c_1(M) = 0$，$c_1(M) > 0$ と表すことにする．M が Riemann 面のとき，KE 計量の存在は古典的な一意化定理から従う．M が高次元のときは，$c_1(M) \le 0$ であれば KE 計量はただ 1 つ存在することが，Aubin，Yau によって証明された．M が Fano 多様体（すなわち，$c_1(M) > 0$）の場合は，**二木不変量**と呼ばれる KE 計量が存在するための障害と，二木不変量が消えないような具体例がいくつか構成されている．近年の研究によって，KE 計量の存在は "K-安定性" と呼ばれる幾何学的不変式論的安定性と同値であることが Chen-Donaldson-Sun，Tian によって証明された．

本講演では，**Kähler-Ricci soliton (KS)** の存在問題について考える．Fano 多様体 M 上の Kähler 計量 ω と正則ベクトル場 V の対 (ω, V) は，関係式 $\mathrm{Ric}(\omega) - \omega = L_V\omega$ を満たすとき，KS であると言う．KS は Kähler-Ricci flow と呼ばれる Kähler 計量 ω_t に関する時間発展方程式：

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_t}{\partial t} = -\mathrm{Ric}(\omega_t) + \omega_t \\ \omega_0 \in c_1(M) \end{cases}$$

の自己相似解として自然に考えうる計量であり，KE 計量の一般化を与えている．また，KS を研究することは次の 2 つの理由で重要である：

(1) KS の候補となるベクトル場 V は M の正則構造から一意的に決まる．したがって，KS は KE 計量が存在するための障害である [5].

(2) Kähler-Ricci flow は時間大域解をもつ [2]．さらに，この解は適当な仮定のもとで，KS に Cheeger-Gromov 収束する [6].

KS に対しては二木型の障害（**modified 二木不変量**と呼ぶことにする）は構成されてはいたものの [5]，つい昨今まで幾何学的不変式論的安定性の概念は存在しなかった．2014 年，Berman-Nyström は modified 二木不変量を対数端末特異点をもつ Fano 多様体に対して一般化することで，KS に対する K-安定性の概念を導入した [1].

2. 基本事項

2.1. modified 二木不変量

M を n 次元正規 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体とする．簡単のため，M は次の条件を満たしているものと仮定する：

1. M は射影多様体 N のコンパクトな部分多様体である．
2. ある整数 k と N 上の豊富な直線束 L が存在して，M の regular part M_{reg} 上で，同型

$$L|_{M_{\mathrm{reg}}} \simeq -kK_{M_{\mathrm{reg}}} \tag{1}$$

が成り立つ．

本研究は特別研究員奨励費 (課題番号:25-3077) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 53C25
キーワード：Kähler-Ricci soliton, complete intersection
* 〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町　名古屋大学 多元数理科学研究科
e-mail: m11036a@math.nagoya-u.ac.jp

3. Lie 群 $G := \mathrm{Aut}(M)$ が (N, L) に同型 (1) が G-同変になるように作用する．

特に，小平埋め込みは上の条件をすべて満たしていることに注意しておく．

定義 1. $-K_{M_{\mathrm{reg}}}$ 上の *Hermite* 計量 h が *admissible* であるとは，h^k が同型 (1) のもとで L 上の滑らかな *Hermite* 計量に拡張できることである．

h を $-K_{M_{\mathrm{reg}}}$ 上の admissible な Hermite 計量とし，$\omega := -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log h$ とおく．このとき，$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ 上の関数 $\mathcal{F}$ を関係式

$$\mathcal{F}(V) = -\frac{1}{c_1(M)^n}\int_M e^{\mu_{h,V}}\omega^n \tag{2}$$

で定め，さらに，modified 二木不変量 Fut_V を

$$\mathrm{Fut}_V(W) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}(V+tW)\bigg|_{t=0} = -\frac{1}{c_1(M)^n}\int_M \mu_{h,W}e^{\mu_{h,V}}\omega^n \tag{3}$$

で定める．ただし，$\mu_{h,V}$ は正則ポテンシャルを表す．また，h は admissible なので，(2)，(3) の積分は有限であることに注意しておく．

M が対数端末特異点をもつ場合は，次のように代数的に定義することも可能である：V を M 上の正則ベクトル場でトーラス作用を生成すると仮定する．このとき，レベル k の関数 $\mathcal{F}$ の量子化 $\mathcal{F}_k(V)$ を

$$\mathcal{F}_k(V) = -k\sum_{i=1}^{N_k}\exp(v_i^{(k)}/k) \tag{4}$$

により定める．ここで，$N_k := \dim(H^0(M, -kK_M))$，$(v_i^{(k)})$ は $\mathrm{Re}(V)$ の生成する無限小作用の固有値とする．さらに，W を $\mathbb{C}^*$-作用を生成する M 上の正則ベクトル場とし，レベル k の modified 二木不変量 $\mathrm{Fut}_{V,k}(W)$ を

$$\mathrm{Fut}_{V,k}(W) := -\sum_{i=1}^{N_k}\exp(v_i^{(k)}/k)w_i^{(k)} \tag{5}$$

と定める．ここで，$(v_i^{(k)})$，$(w_i^{(k)})$ はそれぞれ $\mathrm{Re}(V)$，$\mathrm{Re}(W)$ の生成する無限小作用の固有値である．一般論により，$k \to \infty$ のとき，N_k は高々 k^n の増大度，$\mathcal{F}_k(V)$ および $\mathrm{Fut}_{V,k}(W)$ は高々 k^{n+1} の増大度をもつことが知られている（M が滑らかであれば，これは同変 Riemann-Roch の定理を用いて証明することもできる）．そこで，我々は

$$\mathcal{F}(V) := \lim_{k\to\infty}\frac{\mathcal{F}_k(V)}{kN_k}, \tag{6}$$

$$\mathrm{Fut}_V(W) := \lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{Fut}_{V,k}(W)}{kN_k} \tag{7}$$

により，関数 $\mathcal{F}$ および modified 二木不変量 Fut_V を定める．これらの定義は先に積分不変量として与えた定義と一致する．

2.2. テスト配位

代数多様体 M に代数群 G の作用 $G \curvearrowright M$ があったとする．このとき，我々は商空間 M/G を構成したい．しかし，M は滑らかとは限らないし，G-作用は一般には自由ではないため，M/G が性質のよい空間（例えば Hausdorff 分離公理を満たす空間）として定義できる保証はない．Mumford のアイデアは，M/G を射影代数多様体 $M/G := \mathrm{Proj}A^G$ として定義するというものであった．ここで，A は M 上の函数全体の成す代数であり，A^G はその G-不変な元全体の成す部分代数である．この構成は非常にシンプルだが，むしのそのために射影 $M \dashrightarrow M/G$ を理解することが困難となる．この射影は一般には有理写像であり，任意の G-不変函数 f に対して $f(x) = 0$ であるような点 $x \in M$ では，この写像は定義できない．そこでこのような点

(unstableな点）をすべて排除し，semistableな点だけからなる集合M_{ss}を考えることで，射影$M_{\mathrm{ss}} \to M/G$は自然な意味で定義される．このような理論は幾何学的不変式論（GIT）と呼ばれる．以上はすべて有限次元の枠組みの中での話であるが，実は，KE計量（あるいはKS）の存在問題は無限次元版の幾何学的不変式論（GIT）による形式的な解釈が存在する（詳しくは，[3]を参照されたい）．

さて，MをFano多様体，VをM上のトーラス作用を生成する正則ベクトル場とする．

定義 2. 対(M, V)に対するテスト配位$\mathcal{T}$とは，

- 平坦なスキームの射$\mathcal{M} \to \mathbb{C}$.
- $\mathcal{M} \to \mathbb{C}$への同変$\mathbb{C}^*$-作用$\rho$，ここで，底空間$\mathbb{C}$への作用はスカラー積により定義されるものとする．
- $\mathcal{M}$上の正則ベクトル場$\mathcal{V}$.

から成るもので，さらに条件

1. *$\mathcal{M}$の各ファイバーは対数端末特異点をもつ正規$\mathbb{Q}$-Fano多様体.*
2. *genericファイバー(M_1, V_1)（$1 \in \mathbb{C}$上のファイバー）は，(M, V)に同型である．*
3. *ベクトル場$\mathcal{V}$は，$\mathcal{M} \to \mathbb{C}$の各ファイバーを保存する．*

このとき，ρ作用によって，ファイバー(M_t, V_t)（$t \neq 0$）は，すべてgenericファイバー(M_1, V_1)に同型となる．一方で，中心ファイバー(M_0, V_0)は一般に特異をもつ．また，ρは自然に中心ファイバー(M_0, V_0)への$\mathbb{C}^*$-作用を定める．ρの無限小生成ベクトル場を$\mathcal{W}$とすると，$\mathcal{V}$，$\mathcal{W}$は共に中心ファイバーに接するベクトル場であり，従ってM_0への制限$V_0 := \mathcal{V}|_{M_0}$，$W_0 := \mathcal{W}|_{M_0}$が定義される．テスト配位$\mathcal{T}$の最も簡単な具体例は，$\mathcal{M} = M \times \mathbb{C}$で，$\rho$を$\mathcal{M}$第2因子へのスカラー積により定める場合である．このような$\mathcal{T}$を**積テスト配位**と呼ぶ．

定義 3. 対(M, V)は次の条件を満たすとき，*K-polystable*であるという：

1. *対(M, V)の任意のテスト配位$\mathcal{T}$に対して，$\mathrm{Fut}_{V_0}(W_0) \geq 0$が成り立つ．*
2. *1の等号成立は，$\mathcal{T}$が積テスト配位のときに限る．*

K-polystableの定義は，有限次元GITにおけるHilbert-Mumford判定法が元になっている．つまり，安定性を示すためには，1-パラメータ群でパラメトライズされた(M, V)の任意の変形族に対する数値判定を行えば十分である，ということを言っている．

定理 1 ([1], Theorem 1.5). *(M, V)はKSを許容すれば，K-polystableである．*

3. 主結果

KSに対するK-安定性の概念は導入されて日が浅いため，研究手法はおろか，計算例すらほとんど知られていない状態であった．そこで，講演者は関数$\mathcal{F}$（従って，modified 二木不変量Fut_V）を代数的に計算可能にする公式を構成した．

定理 2 ([4]). *Mを$\mathbb{C}P^N$内のFano完全交叉とし，Mの定義式（斉次多項式）を$F_1, \cdots, F_s$，それぞれの次数を$d_1, \cdots, d_s$とおく．また，$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\left(\sum_{i=0}^N |z^i|^2\right)$を$\mathbb{C}P^N$のFubini-Study計量とする．$V \in \mathfrak{sl}(N+1, \mathbb{C})$を$\mathbb{C}P^N$上の正則ベクトル場で，適当な定数$\alpha_i$に対して関係式$VF_i = \alpha_i F_i$ $(i = 1, \cdots, s)$を満たすものとする．このとき，関数$\mathcal{F}$は次の式で表される：*

$$\mathcal{F}(V) = -\frac{(N-s)!}{d_1 \cdots d_s m^{N-s}} \exp\left(\sum_{i=1}^s \alpha_i\right) \int_{\mathbb{C}P^N} \prod_{i=1}^s (d_i\omega + d_i\theta_V - \alpha_i) e^{m\theta_V} \cdot e^{m\omega}. \tag{8}$$

ただし，$m := N + 1 - d_1 - \cdots - d_s$は定数，$\theta_V := V \log\left(\sum_{i=0}^N |z^i|^2\right)$は$\mathbb{C}P^N$上の関数である．

この公式は，局所化定理や特異点解消を用いた計算とは異なり，多様体の幾何学的データを一切必要とせず，また，多様体がどのような種類の特異点をもっていたとしても，代数的なデータのみを用いて画一的に計算ができるという点で優れていると考えられる．

参考文献

[1] R. J. Berman and D. W. Nyström, *Complex optimal transport and the pluripotential theory of Kähler-Ricci solitons*, arXiv:1401.8264.

[2] H. D. Cao, *Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds*, Invent. Math., **81** (1985), 359–372.

[3] S. K. Donaldson, *Remarks on gauge theory, complex geometry and four-manifold topology*, in 'Fields Medallists' Lectures' (Atiyah, Iagolnitzer ads.), World Scientific, 1997, 384–403.

[4] R. Takahashi, *On the modified Futaki invariant of complete intersections in projective spaces*, arXiv:1410.4891.

[5] G. Tian and X. H. Zhu, *A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons*, Comm. Math. Helv., **77** (2002), 297–325.

[6] G. Tian and X. H. Zhu, *Convergence of Kähler-Ricci flow*, J. Amer. Math. Soc., **20** (2007), 675–699.