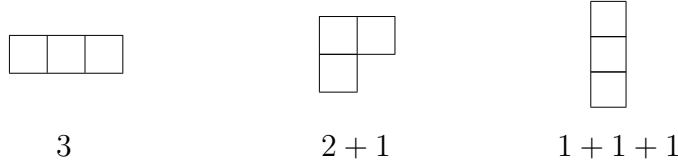


Immanant 不等式の精密化とその極限挙動

田端亮 (広島大学大学院理学研究科)*

1. Immanant の定義と不等式

n の分割とは, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\ell = n$ となる整数の非増大列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell \geq 0$ のことである. i 行目に λ_i 個の箱を並べたものはヤング図形と呼ばれ, 分割との対応があるので, 区別せずに扱うことにする. $n = 3$ に対するヤング図形は以下である.



\mathfrak{S}_n の表現とは, 準同型写像 $\rho : \mathfrak{S}_n \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ のことである. その中で, 既約な表現もまた n の分割と 1 対 1 に対応することが知られている.

n 次正方形行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ の determinant (行列式) と permanent (恒久式) とは,

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \quad \text{per } A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

であるが, これらの係数部分はそれぞれ交代表現 $\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$, 自明表現 $\sigma \mapsto 1$ (のトレース) と見ることができる. この部分をその他の既約表現のトレースに置き換えることでいくらかのバリエーション (d_λ で表す) ができるだろう. 例えば, $n = 3$ であれば,

$$\begin{aligned} \det A = d_{\mathbb{1}}(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}, \\ d_{\mathbb{2}+\mathbb{1}}(A) &= 2a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}, \\ \text{per } A = d_{\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}}(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

といった具合である. これらを immanant と呼ぶのだが, 改めて, その定義を以下に記す.

定義. $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ とする. ρ_λ を, n の分割 λ に対応する \mathfrak{S}_n の既約表現とすると, λ に対応する immanant d_λ を次で定義する.

$$d_\lambda(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{tr}(\rho_\lambda(\sigma)) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

また, immanant の normalization \bar{d}_λ を $\bar{d}_\lambda = 1/(\text{tr}(\rho_\lambda(\text{id})))d_\lambda$ と定義する.

Schur は immanant を導入し, さらに次のような不等式を示した.

定理 (Schur [6]). A が半正値エルミート行列であるとき, 次が成り立つ.

$$\bar{d}_\lambda(A) \geq \det A.$$

* e-mail: tabata-ryo@hiroshima-u.ac.jp

つまり, determinant とは最小の immanant である. これに対し, Lieb による最大なもの予想が次であり, permanental dominance 予想と呼ばれる.

予想 (Lieb [2]). A が半正値エルミート行列であるとき, 次が成り立つ.

$$\bar{d}_\lambda(A) \leq \text{per } A.$$

この予想は, $n \leq 13$ で正しいことが知られている ([4]) が, 一般には解決していない.

Schur の不等式と Lieb の permanental dominance 予想の精密化を考えるために, $\det A \neq \text{per } A$ を満たす半正値エルミート行列 A に対して, 次を定義する.

$$T_\lambda(A) = \frac{\bar{d}_\lambda(A) - \det A}{\text{per } A - \det A}.$$

Schur の不等式, Lieb の予想は, それぞれ $T_\lambda(A) \geq 0$, $T_\lambda(A) \leq 1$ と言い換えられる. この観点から精密化を考えたときに, ほとんどの immanant に対して, 次のような行列が T_λ の最大値を与えることが予想される [8].

$$Y_n = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

半正値エルミート行列は, グラム行列で表すことができ, それによりベクトルの配置とみなすことができるが, Y_n は原点から中心とする正 $n-1$ 単体の各頂点へのベクトルの配置に対応する. また, 完全グラフのラプラシアン行列 (の正規化) ということもできる.

2. Immanant の極限挙動

ここからは半正値エルミート行列 Y_n について見ていく. 行列 Y_n の determinant が 0 であることは即座に分かるが, permanent に関して Frenzen-Fischer [1] は次のような結果を与えている.

定理 (Frenzen-Fischer[1]).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{per } Y_n = \frac{e}{2}.$$

これを受け, Y_n の他の immanant はどのような極限值をとるのかを考えたい. 上で定義した T_λ についてその挙動 (つまり, permanental dominance 予想の挙動) を見ていくことにする. n を大きくすると, ヤング図形の箱の数が大きくなることに注意する. 最も基本的なランダムヤング図形である Plancherel 測度を考えると次のことが分かる.

定理. Plancherel 測度によるランダムヤング図形 λ に対し, Y_n のそれに対応する T_λ の期待値について次が成り立つ.

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} E [T_\lambda(Y_n)] = \frac{2}{e}.$$

次に, 長方形ヤング図形 $\lambda = (k^n)$ について考えてみよう.

定理. k を正整数とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{(k^n)}(Y_{kn}) = 2 \left(\frac{k}{k+1} \right)^k.$$

ここで, 列の数 k を $k \rightarrow \infty$ とすると,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{(k^n)}(Y_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{k}{k+1} \right)^k = \frac{2}{e}$$

となることが分かる.

続いて, ヤング図形列 $\lambda^{(n)}$ を考え, ただし, 行の数を有限とする. $n \rightarrow \infty$ のとき, $\lambda_i^{(n)}/n \rightarrow b_i$ となる場合を考える.

定理. ℓ を正整数とし, ヤング図形の列 $\lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \dots$, $|\lambda^{(n)}| = n$ を考える. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}/n = b_i$, $b_1 > b_2 > \dots > b_\ell$ であるとき, 次が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\lambda^{(n)}}(Y_n) = 2 \prod_{i=1}^{\ell} \left(\frac{1}{1+b_i} \right).$$

ここで, $\prod_{i=1}^{\ell} (1-b_i)$ がある微分方程式の折れ線近似であることに気付くと,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu^{(n)}}(Y_n) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^{\ell} (1-b_i) = \frac{2}{e}.$$

となることが分かる. 同様にして, $\lambda^{(n)}$ の共役 (つまり, 行と列を入れ替えたもの) $\mu^{(n)}$ を考えると, やはり

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu^{(n)}}(Y_n) = \frac{2}{e}$$

が得られ, 上記の例はいずれも $e/2$ という値となる. このことから, 次の予想を立てた.

予想. ヤング図形の列 $\lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \dots$, $|\lambda^{(n)}| = n$ を考える. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)}/n = 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)'} / n = 0$ ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\lambda^{(n)}}(Y_n) = \frac{2}{e}.$$

参考文献

- [1] C. L. Frenzen, I. Fischer, On a Conjecture of Pierce for Permanents of Singular Correlation Matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 14(1):74-81 (1993).
- [2] E. H. Lieb, Proofs of Some Conjectures on Permanents, J. Math. and Mech. 16:127-134 (1966).
- [3] T. H. Pate, Immanants and Decomposable Tensors that Symmetrize to Zero, Linear and Multilinear Algebra 28(3):175-184 (1990).
- [4] T. H. Pate, Row Appending Maps, Ψ -functions, and Immanant Inequalities for Hermitian Positive Semi-definite Matrices, Proc. London Math. Soc.(3) 76(2):307-358 (1998).
- [5] S. Pierce, Permanents of Correlation Matrices, Current Trends in Matrix Theory, R. Grone and F. Uhlig eds., Elsevier, North-Holland, Amsterdam (1987).
- [6] I. Schur, Über endliche Gruppen und Hermitische Formen, Math. Z. 1:184-207 (1918).
- [7] Dias da Silva, On the μ -colorings of a Matroid, Linear and Multilinear Algebra 27(1):25-32 (1990).
- [8] 田端亮, Generalized Matrix Functions の不等式, 第10回数学総合若手研究集会 (2014).