一般リーマン予想の下での
Hardy-Littlewood予想の例外集合について

鈴木雄太　(名古屋大学大学院多元数理科学研究科)*

1. Introduction

1923年, Hardy-Littlewood[1] は

「十分大きい自然数は平方数であるか素数と平方数の和でかけるであろう」

と予想した．この予想は今日 “Hardy-Littlewood 予想” と呼ぶもののひとつであるが, やはり未解決である．自然数 N に対して, N 以下の自然数であって平方数でも素数と平方数の和でもないものの個数 $E(N)$ を考える．今回は一般リーマン予想の下で, この $E(N)$ の上からの評価を行いたい．以後, 一般リーマン予想を常に仮定する．

一般リーマン予想の下での $E(N)$ の最初の評価は 1985 年の A. I. Vinogradov[6] による $E(N) \ll N^{2/3+\varepsilon}$ である．彼は詳細な計算を残さなかった上, その評価は一般リーマン予想を仮定したという観点からは余り満足のいくものではない．このような評価の詳細な計算は 1993 年に三河 [3, Proposition] により初めて行われ, 彼は Circle Method を用いて Vinogradov の評価を

$$E(N) \ll N^{1/2}(\log N)^A(\log\log N)^4, \quad (A\text{はある正の定数}) \tag{1}$$

という形へと改善した．彼の得た定数 A の値は $A = 4$ である．この評価は GRH の効果が典型的に現れていて, GRH を仮定する上では現在の技術でのほぼ最良な評価であろう．しかし log べき分の観点からは, まだ改善が望める．実際, 1995 年に Perelli-Zaccagnini[4, p. 191] は, 三河 [3] の計算を改良することで $A = 3 + \varepsilon$ とできることを注意した．この log べき分の改善がどこまで行えるかについて考えたい．

今回, 彼らのような Circle Method による計算を, いくつかの点でより注意深く行うことで, $A = 3/2$ とできることを示した．本講演では, この改善の方法について報告する．

Main Theorem. 一般リーマン予想の下,

$$E(N) \ll N^{1/2}(\log N)^{3/2}(\log\log N)^4$$

が成り立つ．

2. Circle Method

この $E(N)$ の評価には Hardy-Littlewood による Circle Method を用いる．まず, 三河 [3] の計算では, 素数および平方数の生成関数として三角多項式

$$S(\alpha) := \sum_{n\le N}\Lambda(n)e(n\alpha), \quad W(\alpha) := \sum_{n^2\le N} e(n^2\alpha), \quad e(x) := \exp(2\pi i x)$$

が用いられているが, Languasco-Perelli [2] に習いべき級数

$$\widetilde{S}(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)e^{-n/N}e(n\alpha), \quad \widetilde{W}(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2/N}e(n^2\alpha)$$

* e-mail: m14021y@math.nagoya-u.ac.jp

を用いる．すると, 自然数nを素数と平方数で書き表す書き表し方をおおよそ$\log$の重み付きで数えた

$$R(n)=\sum_{k+m^2=n}\Lambda(k)$$

を考えることにすれば, その生成関数は

$$\widetilde{S}(\alpha)\widetilde{W}(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}R(n)e^{-n/N}e(n\alpha)$$

で与えられる．一方, Hardy-Littlewoodにより,

$$\mathfrak{S}(n)=\begin{cases}\displaystyle\prod_p\left(1-\frac{(n/p)}{p-1}\right) & (n\text{が平方数でない時})\\ 0 & (n\text{が平方数の時})\end{cases}$$

とおくと[1],

$$R(n)\sim\mathfrak{S}(n)\sqrt{n},\quad n\to\infty, n\neq m^2$$

となることが予想されている．この観点から

$$\sum_{n\le N}\left(R(n)-\mathfrak{S}(n)\sqrt{n}\right)^2$$

というような2乗平均を考えることにすると, (1)はこの2乗平均を$\ll N^{3/2}(\log N)^A$という形で評価できれば従うことが分かる．そこでこの2乗平均の評価のためにべき級数[2]

$$U(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{S}(n)\sqrt{n}e^{-n/N}e(n\alpha)$$

を考えれば, Parsevalの等式より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(R(n)-\mathfrak{S}(n)\sqrt{n}\right)^2e^{-2n/N}=\int_0^1\left|\widetilde{S}(\alpha)\widetilde{W}(\alpha)-U(\alpha)\right|^2d\alpha \tag{2}$$

を得る.ここで左辺のAbelian weight $e^{-2n/N}$はさほど問題にならない．このように2乗平均を積分で表して, その積分を$\widetilde{S}(\alpha)$や$\widetilde{W}(\alpha)$の近似を用いて評価する, というのが大体の流れである．そのために以下の様なFarey分割を用いる．パラメータ$1\le P,Q\le N$を導入し, $PQ=N$かつ$Q\ge 2015\sqrt{N}$と仮定する．単位区間$I=[1/Q,1+1/Q]$を考える．この単位区間Iの中にあるa/qという形の分数であって$(a,q)=1$なるものをFarey分数と呼ぶが, このFarey分数の周りの小区間$\xi_{a,q}=[a/q-1/qQ,a/q+1/qQ]$を考える．そこで, これら小区間のうち分母の小さいFarey分数に対応する者たちの和集合

$$\mathfrak{M}=\coprod_{q\le P}\ \coprod_{a\pmod q}^{*}\xi_{a,q}$$

をmajor arcと呼ぶ．ただしここで$\coprod^*$は既約剰余類のみを渡るという意味である．この補集合$\mathfrak{m}=I\setminus\mathfrak{M}$をminor arcと呼ぶ．評価すべき(2)の右辺の積分はmajor arc上の積分とminor arc上の積分へと分割して評価される．$\widetilde{S}(\alpha)$や$\widetilde{W}(\alpha)$の近似が行われるのはmajor arc上の積分のみであり, 近似のあまりうまく行かないminor arc上の積分はBesselの不等式を用いて評価する．

[1] ここで(n/p)はLegendre記号.

[2] 本当はさらに$\mathfrak{S}(n)$を有限な形に切ってしまったものに対してべき級数を考える.

3. Languasco-Perelliの評価

まず, 素数の生成関数$\widetilde{S}(\alpha)$の近似を考える. 先に三角多項式でなく, べき級数を生成関数として採用したわけであるが, その主な理由は$\widetilde{S}(\alpha)$の近似にある. 必要な評価は適当な幅$\xi > 0$に対して

$$\sum_{a \pmod q}^{*} \int_{-\xi}^{\xi} \left| \widetilde{S}\left(\frac{a}{q}+\alpha\right) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{1}{z} \right|^2 d\alpha \ll qN\xi(\log N)^B \tag{3}$$

というようなものである. ここで$z = 1/N - 2\pi i\alpha$である. この左辺はmajar arcの中で同じ分母qを持つFarey分数に対応する小弧上での2乗誤差をだいたい表していることに注意する. 尚, 三河 [3] での対応する評価では$B = 4$である.

三角多項式を用いた場合, DirichletのL関数から三角多項式への直接のExplicit Formulaが得られない. そのため, 一旦Gallagherの補題等を用いてExplicit Formulaが存在し使用できるような形に変形してから評価せねばならない. このように間接的にExplicit Formulaを用いなければならないという事情により(3)の定数Bは$B = 4$程度の大きさになってしまう.

これを回避するために, Languasco-Perelli [2] は（一般）リーマン予想下の Circle Method において, べき級数を用いた. べき級数に対してはMellin-Cahen formula による古典的なExplicit Formulaが存在したことに注意する. 彼らの手法により, (3) において$B = 2$と取れる事がわかり, 最終的に, (1) において$A = 3$ととれる事がわかる. Perelli-Zaccagnini [4] は彼らの注意について詳細を述べていないが, 恐らくこの方法に基づき$A = 3 + \varepsilon$を導いたと思われる.

4. Jacobiの変換公式

次に平方数の生成関数$\widetilde{W}(\alpha)$の近似を考える. この$\widetilde{W}(\alpha)$は古典的なJacobiのテータ関数を少し変形しただけのものである. 従って, Jacobiの変換公式を評価することで, Farey分数a/qの周りで

$$\widetilde{W}\left(\frac{a}{q}+\alpha\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{G(a,q)}{q} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} + O\left(q^{1/2} + q^{1/2}N^{1/2}|\alpha|^{1/2}\right) \tag{4}$$

という周知の近似式を得る. ここで$G(a,q)$はGauss和

$$G(a,q) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^2}{q}\right)$$

である. 三河 [3] は三角多項式の場合のWeyl評価

$$|W(\alpha)|^2 \ll \left(\frac{N}{q}+q\right)(\log N), \quad \alpha \in \xi_{a,q}, q \le P \tag{5}$$

やVaughanの教科書にある評価[5, Theorem 4.1]

$$\left| W(\alpha) - \frac{G(a,q)}{q} \sum_{n \le N} \frac{e(n\alpha)}{2\sqrt{n}} \right| \ll q(\log q)^2, \quad \alpha \in \xi_{a,q}, q \le P \tag{6}$$

を用いたが, そのべき級数における対応物を(4)から得ることができる. そのJacobiの変換公式をWeyl評価(5)やVaughanの評価6 と比べると, logべきが綺麗に消えている事がわかる. そこで, このJacobi変換公式による評価を用いると, (1) において容易に$A = 5/2$とできることが分かる.

5. Major arcの伸展

さらなる改良を行おうとすると, 次の主な障壁はmajor arcの伸展[3] による誤差である. ここでmajor arcの伸展による誤差と言っているのは, 次のようなものである. 先に(2)の右辺の積分を評価する際, 生成関数の近似はmajor arc上でしか行わなかった. minor arc上の積分は評価し終えてしまったわけである. そのため, 近似後の積分は

$$\int_{\mathfrak{M}} (\text{生成関数の近似}) d\alpha + (\text{誤差}) = \sum_{q \le P} \sideset{}{^*}\sum_{a \pmod q} \int_{\xi_{a,q}} (\text{生成関数の近似}) d\alpha + (\text{誤差})$$

という形になる. こうしておけば, 生成関数を近似したものは分かりやすい関数のため, 個々の$\xi_{a,q}$上の積分をI全体の積分へと伸展して明示的に計算できる. このI全体の積分への近似の際に生じる誤差をmajor arcの伸展による誤差と呼んだ.

三河[3]はこの誤差をdual large sieveを用いて評価したが, さらなる改良を目指すとき, これでは不十分である. そこで, 小さな個々のmajor arcの伸展部たちを, 互いに重なり合わない部分

$$\coprod_{q \le P} \sideset{}{^*}\coprod_{a \pmod q} \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{2qP}, \frac{a}{q} - \frac{1}{qQ}\right] \cup \left[\frac{a}{q} + \frac{1}{qQ}, \frac{a}{q} + \frac{1}{2qP}\right]$$

と重なってしまう部分

$$\coprod_{q \le P} \sideset{}{^*}\coprod_{a \pmod q} \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{2}, \frac{a}{q} - \frac{1}{2qP}\right] \cup \left[\frac{a}{q} + \frac{1}{2qP}, \frac{a}{q} + \frac{1}{2}\right]$$

に分けてみる. そうしておいて, 重なり合わない部分にBesselの不等式を適用し, 残りの部分にlarge sieveを用いると, logべきが他の項に圧倒される程にまで消えてしまう. これにより$A = 2$とできることが分かる.

6. Main Theoremの導出

さらなる改善のためには, major arc上で平方数の生成関数の減衰を考慮に入れればよい. これによりMain Theoremの通り$A = 3/2$とできることが分かる.

参考文献

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio Numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. **44** (1923), pp. 1-70.

[2] A. Languasco and A. Perelli, *On Linnik's theorem on Goldbach numbers in short intervals and related problems*, Ann. Inst. Fourier. **44** (1994), pp. 307-322.

[3] H. Mikawa, *On the sum of a prime and a square*, Tsukuba J. Math. **17** (1993), pp. 299-310.

[4] A. Perelli and A. Zaccagnini, *On the sum of a prime and a k-th power*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Math. **59** (1995), pp. 185-200.

[5] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method. 2nd ed.*, Cambridge, 1997.

[6] A. I. Vinogradov, *On a binary problem of Hardy-Littlewood.*, Acta Arith. **46** (1985), pp. 33-56.

[3] 本来, GRHを仮定しているのだから, major arcとminor arcの違いはないようなものだが, 今はlogべき分の違いを問題にしているため, やはりmajor, minor arcを導入したほうが結果が良くなる.