

C^1 級領域上の有界関数空間での高階楕円型作用素が生成する半群の解析性について

鈴木 拓也 ^{*†}

1 導入

作用素の半群論と偏微分方程式論には密接な関係があります。例えば、 ∂_t を時間についての微分として Δ をラプラシアンとして次の熱方程式の初期値問題を考えます。

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \{t > 0\} \\ u(x, 0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

熱方程式の解 $u(x, t)$ は初期値 u_0 を定めると次のように表せることが知られています。

$$u(x, t) = (G(\cdot, t) * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

この解 u は初期値 u_0 から t 秒時間を進める作用素 $S(t)$ を用いて $S(t)u_0$ と表せて次の性質を満たします。

$$S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 \text{ for } t, s > 0.$$

この性質に着目して次のように作用素の半群を定義します。

Definition 1.1. X をバナッハ空間とする。 X 上の有界線形作用素の族 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ が半群であるとは次を満たすことを言う。

$$\begin{aligned} S(t+s) &= S(t)S(s) \text{ for } t, s > 0, \\ S(0) &= I_X. \end{aligned}$$

本講演では半群の中でも特に解析的半群について考察します。半群として解析的であることが分かれば、それは解としても時間について解析的であることを意味するので解析的半群を調べることは非常に重要な問題です。例えば熱方程式の解が時間について解析的かどうか調べるためには、その生成作用素であるラプラシアン $-\Delta$ がセクトリアルという性質を満たすかを調べればよいということが作用素の半群論の抽象論から知られています。ラプラシアン $-\Delta$ がセクトリアルという条件は大雑把に言うと、 λ と f が適切に与えられた時に次のレゾルベント方程式のアプリオリ評価、そして解の存在と一意性が成り立つという条件です。

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta)u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

特に本講演では高階楕円型作用素について L^∞ 空間でのレゾルベント評価と解が生成する半群の解析性を一様 C^1 級領域上の場合に背理法と膨らまし法と呼ばれる手法を用いた解析を紹介します。

^{*} Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan

[†] tsuzuki@ms.u-tokyo.ac.jp

2 レゾルベント方程式のアプリオリ評価について

まず最初に半群の解析性をえるために必要なアプリオリ評価の結果について記述しようと思います。 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を一様 C^1 級の滑らかさの境界を持つ領域、つまり大まかに言うと領域の境界上の各点の十分小さい近傍で回転と平行移動などの操作により境界が C^1 級関数で表すことが出来てその傾きが一様に抑えられているとして、 $f \in L^\infty(\Omega)$ とします。また、係数 $a_{\alpha,\beta}$ を実数関数として主表象を $b(x, \xi) = \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} a_{\alpha,\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta}$ として、次の $2m$ 階の微分作用素 L を考えて次のように仮定します。

$$L = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2m} (-1)^{|\beta|+1} \partial^\beta a_{\alpha,\beta} \partial^\alpha$$

$$(E1) \quad a_{\alpha,\beta} \in \begin{cases} W^{1,\infty}(\Omega) & \text{if } |\alpha| = m \\ L^\infty(\Omega) & \text{if } |\alpha| \leq m-1 \end{cases}$$

(E2) L は強一様楕円型つまり、定数 $\delta_L > 0$ が存在して、

$$b(x, \xi) \geq \delta_L |\xi|^{2m} \text{ for } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

記号を次のように定義し、弱解について定義し定理を述べます。

$$\Sigma_{\pi-\varepsilon} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \pi - \varepsilon\},$$

$$W_{0,loc}^{m,p}(\Omega) = \{f \in W_{loc}^{m,p}(\Omega) : f\eta \in W_0^{m,p}(\Omega) \forall \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\},$$

$$N(u_\lambda, \lambda) = \sup_{x \in \Omega} \left(\sum_{|\alpha|=k \leq m-1} |\lambda|^{1-\frac{k}{2m}} |\partial^\alpha u(x)| \right).$$

Definition 2.1. $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, $M > 0$, $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varepsilon} \cap \{|\lambda| \geq M\}$, そして $f \in L^\infty(\Omega)$ とします。このとき、 $u_\lambda \in W_{0,loc}^{m,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ がレゾルベント方程式

$$\begin{cases} (\lambda - L)u = f & \text{in } \Omega \\ u = \partial_N u = \cdots = \partial_N^{m-1} u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の弱解であるとは、 u_λ が任意のテスト関数 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して次を満たすことをいいます。

$$\lambda(u_\lambda, \phi)_{L^2} + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (a_{\alpha,\beta} \partial^\alpha u_\lambda, \partial^\beta \phi)_{L^2} = (f, \phi)_{L^2}.$$

このときレゾルベント方程式

$$\begin{cases} (\lambda - L)u = f & \text{in } \Omega \\ u = \partial_N u = \cdots = \partial_N^{m-1} u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の弱解 $u \in W_{0,loc}^{m,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ のレゾルベント評価について次の結果が成立します。

Theorem 2.1. $p > n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を一様 C^1 級領域とする。この時、定数 $\varepsilon > \kappa_L$, $C > 0$, 及び $M > 0$ が存在して、任意の $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varepsilon} \cap \{|\lambda| \geq M\}$, $f \in L^\infty(\Omega)$, 及び弱解 $u_\lambda \in W_{0,loc}^{m,p}(\Omega) \cap W^{m-1,\infty}(\Omega)$ について次のレゾルベント評価が成立する。

$$N(u_\lambda, \lambda) \leq C \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (1)$$

このアプリオリレゾルベント評価を示す方針を二重調和作用素 Δ^2 の場合に見てみましょう。まず始めに背理法によってアプリオリ評価が成立しないと仮定すると爆発する解の列 λ_k, f_k, u_k が取れて次の求めるレゾルベント方程式と逆向きの評価が成立します。

$$\|u_k\|_\infty > \frac{k}{|\lambda_k|} \|f_k\|_\infty.$$

最大値ノルムが 1 になるように次のように正規化します。 $v_k = |\lambda_k|u_k$ とおき ($\lambda_k = |\lambda_k|e^{i\theta_k}$)

$$\tilde{v}_k = \frac{v_k}{N(v_k, \lambda_k)}, \quad \tilde{f}_k = \frac{f_k}{N(v_k, \lambda_k)}.$$

このとき、 $\frac{1}{k} > \|\tilde{f}_k\|_\infty$ 、 $|\lambda_k| \geq k$ 、 $\|\tilde{v}_k\|_\infty = 1$ となり、次の方程式が得られます。

$$\begin{cases} (e^{i\theta_k} + \frac{\Delta^2}{|\lambda_k|})\tilde{v}_k = \tilde{f}_k & \text{in } \Omega \\ \tilde{v}_k = \frac{d\tilde{v}_k}{dN} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

正規化したのでこのとき 1 に近い値をとるような領域内の点が取れます。

$$\exists x_k \in \Omega \text{ s.t. } |\tilde{v}_k(x_k)| + |\nabla\tilde{v}_k(x_k)| > \frac{1}{2}$$

その点の周りで解を次のようにスケール変換します。

$$\tilde{w}_k = \tilde{v}_k(x_k + \frac{x}{|\lambda_k|^{\frac{1}{4}}}), \quad \tilde{g}_k = \tilde{f}_k(x_k + \frac{x}{|\lambda_k|^{\frac{1}{4}}})$$

このとき、 $\Omega_k = |\lambda_k|^{\frac{1}{4}}(\Omega - x_k)$ 上の次の方程式が得られます。

$$\begin{cases} (e^{i\theta_k} + \Delta^2)\tilde{w}_k = \tilde{g}_k & \text{in } \Omega_k \\ \tilde{w}_k = \frac{d\tilde{w}_k}{dN} = 0 & \text{on } \partial\Omega_k \end{cases} \quad (3)$$

その後次の二つの主張を示すことで矛盾を示します。まず一つ目がコンパクト性の主張で、宮崎 (2006) などの結果から得られる $W^{m,p}$ 評価を元にスケール変換された解の列が原点のある近傍で一様収束する部分列が取れることを示します。このことから特に解の極限が原点の近傍でゼロでないことが従います。その次に一意性の主張で、レゾルベント方程式の極限方程式の解が恒等的にゼロであることを示します。解の極限は極限方程式を満たすので恒等的にゼロであることが分かるので、コンパクト性の議論で得られる事実と合わせて矛盾が得られてアプリオリ評価が示されます。

2.1 レゾルベント方程式の解の存在と一意性、そして半群の構成と解析性について

有界関数の空間での半群の解析性についての先行研究は、無限遠でゼロな連続関数の空間 C_∞ において $(-\infty, \infty)$ 上の二階楕円型作用素の場合に吉田 (1966) により初めて示されて、その後 N 次元の C^{2m} 級領域上の $2m$ 階楕円型作用素の場合に増田 (1972) により示されて、Stewart(1974) により証明が改良されました。また、M. Hieber(1996) で 2 階の場合は任意の領域の場合に半群の解析性が示されました。その後 M. Hieber(2010) や A. Lunardi(1995) に挙げられているように L^∞ 空間での高階の作用素が生成する半群の解析性について楕円型作用素の係数についての仮定を緩める研究は多くされていますが領域の境界の滑らかさの

仮定を緩める研究はあまりされていませんでした。そこで、得られたレゾルベント評価からレゾルベント方程式の弱解の存在と一意性を示し半群の理論を用いて、一様に C^1 級の有界, 非有界領域上の $2m$ 階の発散型楕円型作用素の L^∞ 空間での解析半群の生成定理を示しました。次のように作用素のドメインを定義します。

$$D(L) = \{u \in \cap_{p>n} W_{0,loc}^{m,p}(\Omega) : u, Lu \in L^\infty(\Omega)\}.$$

Theorem 2.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を一様 C^1 級領域とする。この時, 作用素 $L : D(L) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ はセクトリアルであり、有界関数空間 $L^\infty(\Omega)$ において解析半群 $\{e^{tL}\}_{t \geq 0}$ を生成する。

レゾルベント方程式の解の存在と一意性の問題を解決すれば先ほどのアприオリレゾルベント評価と合わせて高階楕円型作用素がセクトリアルであるということが示されます。方針としましては、解の構成と一意性は次のように示しました。まず外力を半径を変えながら球領域でカットオフして、 $W^{m,p}$ 評価からレゾルベント方程式の近似解を構成します。そして得られた L^∞ アприオリ評価と組み合わせてアприオリ評価を示す際に行ったコンパクト性の議論とほぼ同様に、近似解の列のある部分列が広義一様収束することを示します。後は得られた極限関数がレゾルベント方程式の解であることを示せば存在が示されます。またアприオリ評価と方程式の線型性から一意性が得られます。以上から楕円型作用素がセクトリアルであることが分かり、ダンフォード積分を用いて半群を構成し解析半群の理論を用いて半群の解析性を示しました。

参考文献

- [1] S-S. Byun, S. Ryu, Gradient estimates for higher order elliptic equations on nonsmooth domains, J. Differential Equations 250(2011) 243-263.
- [2] H. Heck, M. Hieber, K. Stavrakidis, L^∞ -estimates for parabolic systems with VMO-coefficients, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S,3, 299-309(2010).
- [3] M. Hieber, Gaussian estimates and holomorphy of semigroups on L^p spaces, J. London Math. Soc. (2)54(1996) 148-160.
- [4] A. Lunardi, Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1995.
- [5] K. Masuda, On the generation of analytic semigroups by elliptic differential operators with unbounded coefficients. unpublished note, (1972).
- [6] V. Maz'ya, M. Mitrea, and T. Shaposhnikova, The Dirichlet problem in Lipschitz domains for higher order elliptic systems with rough coefficients, J. D'analyse Mathmatique, Vol. 110(2010) 167-239.
- [7] Y. Miyazaki, Higher order elliptic operators of divergence form in C^1 or Lipschitz domains, J. Differential Equations, **230**(2006) 174-195.
- [8] H. B. Stewart, Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators. Trans. Amer. Math. Soc., **199**(1974), 141-162.
- [9] T. Suzuki, Analyticity of semigroups generated by higher order elliptic operators in spaces of bounded functions on C^1 domains, (submitted).
- [10] K. Yosida, On holomorphic Markov process, Proc. Japan Acad., **42**(1966), 313-317.