一般化されたリーマン予想の下でのディリクレL関数の対数関数の臨界線付近における挙動

Ade Irma Suriajaya　(名古屋大学多元数理科学研究科)*

2015年3月2日

概　要

ディリクレL関数はリーマンゼータ関数の一つの一般化である。ディリクレL関数の零点に対して、自明でないものは全て臨界線上にあるという一般化されたリーマン予想がある。この講演では、一般化されたリーマン予想を仮定したときのディリクレL関数の対数関数の臨界線付近における評価を紹介する。

1. 導入

リーマンゼータ関数は次のように定義される。

定義 1.1. リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ とは、$\mathrm{Re}\,(s) > 1$ を満たす複素数 s に対して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

を満たすような複素平面上の有理型関数である。

リーマンゼータ関数の零点についてはリーマン予想がある。リーマン予想とは、$\zeta(s) = 0$ を満たす複素数 s は、$0 < \mathrm{Re}\,(s) < 1$ なら、$\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$ を満たすという予想である。さらに、リーマンゼータ関数の一種の一般化であるディリクレL関数に関しては一般化されたリーマン予想がある。ディリクレL関数の定義及び一般化されたリーマン予想の主張は第2節で述べる。

リーマン予想を仮定したときのリーマンゼータ関数及びその一階導関数の対数関数の $\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$ の近くにおける評価が知られている。詳しくは [Tit, Section 14.14] と [Aka, Lemmas 2.4 and 2.6] を参照されたい。これらの結果は、リーマンゼータ関数及びその一階導関数の零点の個数の評価における誤差項と零点の実部の分布に関する評価の誤差項に影響する。詳しくは [Tit, Theorems 9.3, 9.4, and 14.13] 及び [Aka, Theorems 1 and 3] を参照されたい。

この講演の目的は、前段落で述べたもののディリクレL関数への拡張を紹介することである。一般化されたリーマン予想を仮定したときのディリクレL関数及びその一階導関数の対数関数の $\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$ の近くにおける評価については第3節で述べる。第４節では、これらの結果がディリクレL関数及びその一階導関数の零点の個数と零点の実部の分布に関する評価との関係を述べる。

岩谷直治記念財団の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 11M06, 11M26
キーワード：リーマンゼータ関数, ディリクレL関数, 対数関数, 導関数, 零点
*〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町　名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
e-mail: m12026a@math.nagoya-u.ac.jp

2. ディリクレ L 関数

この節では、ディリクレ L 関数の定義と一般化されたリーマン予想の主張を述べる。

はじめに、ディリクレ指標を定義する。

定義 2.1. 自然数 q を法とするディリクレ指標 χ とは、乗法群 $(\mathbb{Z}\backslash q\mathbb{Z})^\times$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への写像であり、次の性質を満たすものである：

1. 任意の自然数 m と n に対して、$\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$,
2. 任意の自然数 n に対して、$\chi(n+q) = \chi(n)$,
3. $(n,q) > 1$ を満たす任意の自然数 n に対して、$\chi(n) = 0$,
4. ある自然数 n_0 が存在して、$\chi(n_0) \neq 0$.

特に、任意の自然数 $q' < q$ に対して、ある自然数 n が存在して、$(n,q) = 1$ かつ $\chi(n+q') \neq \chi(n)$ となるとき、χ が原始的であるという。

ディリクレ L 関数は次のように定義されるリーマンゼータ関数の一つの一般化である。

定義 2.2. 自然数 q を法とするディリクレ指標 χ に付随するディリクレ L 関数 $L(s,\chi)$ とは、q を法とするディリクレ指標 χ と $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ を満たす複素数 s に対して、ディリクレ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

を満たすような複素平面上の有理型関数である。

注 2.3. ディリクレ指標は原始的なら、そのディリクレ級数は $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ を満たす全ての複素数 s に対して成り立つ。

注 2.4. 1 を法とするディリクレ指標に付随するディリクレ L 関数はリーマンゼータ関数に一致する。

$L(s,\chi)$ の零点については以下の予想がある。

一般化されたリーマン予想 (GRH). $L(s,\chi) = 0$ を満たす複素数 s とディリクレ指標 χ に対して、$0 < \mathrm{Re}\,(s) < 1$ なら、$\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$ である。

以降、$\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$ を満たす s 全体の集合を**臨界線**と呼ぶ。

3. ディリクレ L 関数の対数関数の臨界線付近における挙動

この節では、一般化されたリーマン予想を仮定したときのディリクレ L 関数及びその一階導関数の対数関数の臨界線付近における評価を紹介する。

GRH の仮定の下での $L(s,\chi)$ の対数関数の臨界線付近における挙動については以下のように知られている。詳細は [MV, Section 13.2 Exercise 8] 及び [Sel, Section 5] を参照されたい。

定理 3.1. GRH を仮定し、χ を原始的とする。$1/2 \leq \sigma \leq 3/2$ に対して、

$$\log L(\sigma + it, \chi) = O\left(\frac{\log qt}{\log\log qt}\right)$$

が成り立つ。

また、整数mと関数$G(s,\chi)$を以下のように定義する：

$$m := \min\{m' \in \mathbb{N} \mid \chi(m') \neq 0, m' \geq 2\}、\quad G(s,\chi) := -\frac{m^s}{\chi(m)\log m}L'(s,\chi)。$$

GRHを仮定したときに、その対数関数の臨界線付近における挙動は次のようである。

定理 3.2. GRHを仮定し、χを原始的とする。$1/2 \leq \sigma \leq 3/4$であるとき、大きい$T>0$とqのみに依存する定数M_qに対して、ある定数$C>0$が存在して、

$$\log G(\sigma+iT,\chi) = O\left((\log\log qT)\log\left(\frac{m^{M_q}\exp\left(C\left(\frac{(\log qT)^{2(1-\sigma)}}{(\log\log qT)^{1/2}}+(\log qT)^{1/10}\right)\right)}{\log m}\right)\right)$$

が成り立つ。

4. 応用

この節では、定理3.1と3.2の二つの応用を述べる。

① $L(s,\chi)$の零点の個数の評価の誤差項は$L(s,\chi)$の対数関数$\log L(s,\chi)$の臨界線付近における挙動によって決まる。まず、$L(s,\chi)$の偏角関数

$$S(T,\chi) := \frac{1}{\pi}\arg L\left(\frac{1}{2}+iT,\chi\right)$$

は標準な対数枝によって定まった関数として定義する（cf. [Sel, p. 5]）。次の命題の詳細は[Sel, p. 5]、[Dav, Chapter 16]、[Sel, Theorem 6]を参照されたい。

命題 4.1. $T>0$に対して、$N(T,\chi)$は$0<\mathrm{Re}(s)<1,\ 0\leq \mathrm{Im}(s)\leq T$にある$L(s,\chi)$の零点の重複度を込めた個数としたとき、

$$N(T,\chi) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} - \frac{\chi(-1)}{8} + S(T,\chi) - S(0,\chi) + O\left(\frac{1}{1+T}\right) \tag{4.1}$$

が成り立つ。さらに、

$$S(t,\chi) = \begin{cases} O(\log q(1+|t|)), & \text{無条件;} \\ O\left(\frac{\log q(1+|t|)}{\log\log q(3+|t|)}\right), & \text{GRHの下} \end{cases}$$

が成り立つ。

② $L(s,\chi)$の一階導関数$L'(s,\chi)$の実数でない零点の実部の分布と零点の個数の評価において、誤差項は$\log L(s,\chi)$及び$\log G(s,\chi)$によって決まる。具体的には、次の二つの命題がある。

命題 4.2. GRHを仮定し、χを原始的とする。M_qをqのみに依存する定数、cを定数

とする。$T \geq q^c$ に対して、

$$\sum_{\substack{\rho'=\beta'+i\gamma', \\ L'(\rho',\chi)=0, q^c<\gamma'\leq T}} \left(\beta' - \frac{1}{2}\right) = \frac{T}{2\pi}\log\log\frac{qT}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\log m - \log\log m\right)T - \frac{1}{q}\int_2^{\frac{qT}{2\pi}} \frac{dt}{\log t}$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int_{1/2}^{M_q} (-\arg L(\sigma + iq^c, \chi) + \arg G(\sigma + iq^c, \chi))\, d\sigma$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{1/2}^{M_q} (-\arg L(\sigma + iT, \chi) + \arg G(\sigma + iT, \chi))\, d\sigma$$
$$+ O(q^c \log\log q + \log q)$$

が成り立つ。ここで、対数枝を $\log L(s,\chi)$ と $\log G(s,\chi)$ が $\mathrm{Re}\,(s) \to \infty$ のときに 0 に近づいて、それぞれが $\mathbb{C}\backslash\{\rho + \lambda \mid L(\rho,\chi) = 0\ or\ \infty,\ \lambda \leq 0\}$ と $\mathbb{C}\backslash\{\rho' + \lambda \mid L'(\rho',\chi) = 0\ or\ \infty,\ \lambda \leq 0\}$ 上で正則となるように取る。

命題 4.3. GRHを仮定し、χ を原始的とする。$T \geq 2$ に対して、$N_1(T,\chi)$ は $0 < \mathrm{Im}\,(s) \leq T$ にある $L'(s,\chi)$ の零点の重複度を込めた個数としたとき、

$$N_1(T,\chi) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2m\pi} - \frac{T}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\arg G\left(\frac{1}{2} + iq^c, \chi\right) - \frac{1}{2\pi}\arg L\left(\frac{1}{2} + iq^c, \chi\right)$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\arg G\left(\frac{1}{2} + iT, \chi\right) + \frac{1}{2\pi}\arg L\left(\frac{1}{2} + iT, \chi\right)$$
$$+ O(q^K \log q)$$

が成り立つ。ここで、c と K は定数であり、対数枝を命題 *4.2* のように取る。

参考文献

[Aka] H. Akatsuka, *Conditional estimates for error terms related to the distribution of zeros of* $\zeta'(s)$, J. Number Theory **132** (2012), 2242–2257.

[Dav] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, third ed., Springer, 2000.

[MV] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*, Cambridge University Press, 2006.

[Sel] A. Selberg, *Contributions to the theory of Dirichlet's L-functions*, Skr. Norske Vid-Akad. Oslo. I. **1946** (1946), no. 3, 1–62. also available as arxiv:1310.6489 [math.NT].

[Tit] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, second ed. (revised by D. R. Heath-Brown), Oxford Univ. Press, 1986.