On fold singularities of product maps with radially actions

九州大学　数理学研究院　学術研究員　隅田大貴

1　Introduction

複素 n 変数多項式 f は原点で消えるものとする。原点を中心とする球面 $S_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = \varepsilon\}$ と複素超曲面 $V_f = f^{-1}(0)$ の交わりを $L_f = S_\varepsilon \cap V_f$ と表しリンクと呼ぶ。このとき実数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ を満たす任意の ε について、写像

$$\frac{f}{|f|} : S_\varepsilon \setminus L_f \to S^1$$

は臨界点を持たない全射な可微分写像になり、局所自明なファイバー束になる。このファイバーを F_f とすると、任意のファイバーについて $\partial\overline{F_f} = L_f$ となっている。このファイバー束は**ミルナー束**と呼ばれ、複素超曲面特異点のトポロジーの研究にしばしば現れる対象である。原点を中心とする閉球を $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| \leq \varepsilon\}$ とするとき、空間対 $(D_\varepsilon, D_\varepsilon \cap V_f)$ は空間対 (S_ε, L_f) の錐に同相になる。その意味でリンクを調べることは、複素超曲面の特異点の近くでの位相構造に密接に関連していると言える ([4])。また岡睦雄氏によって、良い条件を持つ mixed polynomial から構成されたミルナー束に一般化されており、近年研究が進められている ([2],[3])。

一方、複素多項式 f について、各ファイバーや全空間の位相的構造を調べるために、$|f|$ の臨界点を調べられることがしばしばある。大域的ミルナー束

$$f : \mathbb{C}^n \setminus V_f \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

の定義域多様体には $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が作用する。多項式 f の任意の 0 でない単項 $Cz_1^{b_1} \cdots z_n^{b_n}$ について $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = d$ が成り立つとき、f は weight が $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ で degree が $d \in \mathbb{N}$ の擬斉次多項式であるという。この多項式について

$$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^n \setminus V_f \to \mathbb{C}^n \setminus V_f,\ (c, z) \mapsto (c^{a_1}z_1, \ldots, c^{a_n}z_n)$$

という具体的な作用がある。位相部分群 $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$ についても $\mathbb{C}^n \setminus V_f$ への作用が同様に考えられる。その作用を許容するクラスの mixed polynomial をそれぞれ、radially weighted homogeneous mixed polynomial, polar weighted homogeneous mixed polynomial という。それぞれの作用

$$\mathbb{R}^\times \times \mathbb{C}^n \setminus V_f \to \mathbb{C}^n \setminus V_f,\ (t, z) \mapsto (t^{r_1}z_1, \ldots, t^{r_n}z_n),$$

$$S^1 \times \mathbb{C}^n \setminus V_f \to \mathbb{C}^n \setminus V_f,\ (\lambda, z) \mapsto (\lambda^{p_1}z_1, \ldots, \lambda^{p_n}z_n)$$

を radially action, polar action という。Mixed polynomial に付随する $|f|$ の性質を顕著に表すのが radially weighted homogeneous mixed polynomial である。今回の講演では radially action に注目した、$\mathbb{R}^2$ への可微分写像の特異点の折り目特異点 ([1]) の判定法を述べる。

2 Results

Definition. *([2])* 複素変数 $z_1, \ldots, z_n$ とその複素共役 $\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}$ が変数である複素数係数多項式を **mixed polynomial** という。特に *mixed polynomial* f が任意の $t \in \mathbb{R}^{\times}$ について

$$f\left(t^{r_1} z_1, \ldots, t^{r_n} z_n\right) = t^d f\left(z_1, \ldots, z_n\right)$$

を満たす時、f は **radially weighted homogeneous** であるといい、$\left(r_1, \ldots, r_n\right) \in \mathbb{Z}^n$ を f の **weights**, $d \in \mathbb{Z}$ を f の **degree** と呼ぶ。

Definition. *([1])* M, N をそれぞれ実 m, n 次元の可微分多様体とする。可微分写像 $\varphi : M \to N$ に対して、φ の微分写像 $d\varphi_p : T_p M \to T_{\varphi(p)} N$ の表現行列がフルランクではないとき、$p \in M$ を φ の**特異点**であるといい、φ の特異点集合を $S(\varphi)$ で表す。以下 $m \geq n$ とする。可微分写像 φ の特異点 p の近くで、φ が標準形

$$\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots, x_m\right) \mapsto \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \pm x_n^2 \pm \cdots \pm x_m^2\right)$$

を持つとき、p を φ の**折り目特異点**と言い、特異点が全て折り目特異点である可微分写像を**折り目写像**という。

微分演算子 $d, \overline{d}$ を次で定義する。

$$d = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right),\ \overline{d} = \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}}\right)$$

原点で消える mixed polynomial f について

$$a = \mathrm{Re} \log f = \log |f| : \mathbb{C}^n \setminus V_f \to \mathbb{R}$$

を考える。エルミート内積を $\langle v, w \rangle = v_1 \overline{w_1} + \cdots + v_n \overline{w_n}$ で定義した時、

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Re} \log f = \mathrm{Re}\left(\frac{d}{dt} \log f\right) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dz_j}{dt} \frac{\partial \log f}{\partial z_j} + \frac{d\overline{z_j}}{dt} \frac{\partial \log f}{\partial \overline{z_j}}\right)$$

$$= \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dz_j}{dt} \frac{\partial \log f}{\partial z_j} + \frac{dz_j}{dt} \overline{\frac{\partial \log f}{\partial \overline{z_j}}}\right) = \mathrm{Re}\left\langle \frac{dz}{dt}, \overline{d \log f} + \overline{d} \log f \right\rangle$$

より、$\mathrm{Re}\left\langle v, \overline{d \log f} + \overline{d} \log f \right\rangle = 0$ が全ての接ベクトル $v \in T_p\left(\mathbb{C}^n \setminus V_f\right)$ について成り立つことと、p が a の臨界点であることが同値なので、a の臨界点集合は

$$S(a) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid f\overline{f} > 0,\ \overline{d \log f} + \overline{d} \log f = 0 \right\}$$

になる。サードの定理より、写像 a の臨界値集合は $\mathbb{R}$ の測度 0 の部分集合なので、すなわち $\mathbb{R}$ の離散集合になる。実数 $r > 0$ について、原点を中心とする半径 r の開球とディスクを

$$B_r = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r \right\},\ D_r = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| \leq r \right\}$$

で定義する。写像 a を制限した写像を

$$a_r = \mathrm{Re} \log f = \log |f| : M = B_r \setminus V_f \to \mathbb{R}$$

で定義すると、同様にして a_r の臨界点集合は

$$S\left(a_r\right) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid f\overline{f} > 0,\ r^2 - \|z\|^2 > 0,\ f\overline{df} + \overline{f}\ \overline{d} f = 0 \right\}$$

になる。写像 a_r の臨界点について曲線選択補題により、次のことが成り立つ。

Lemma 1. （曲線選択補題 *[4]*） V を $\mathbb{R}^N$ の実代数的集合とし、U を有限個の実多項式不等式で定義される $\mathbb{R}^N$ の開集合とする。$z_0 \in \overline{U \cap V}$ ならば、$c(0) = z_0,\ c(t) \in U \cap V\ \forall t \in (0,1)$ を満たす解析的曲線 $c : [0,1) \to \overline{U \cap V}$ が存在する。

Lemma 2. 実数 $\eta > 0$ が存在して、写像 a_r の任意の臨界点 z は $|f(z)| \geq \eta$ を満たす。

Proof. 写像 a_r の臨界点 z で $|f(z)|$ が 0 にいくらでも近いものが存在すると仮定すると、それらの極限はコンパクト集合 D_r 上で存在し、$z_0 \in \overline{S(a_r)}$ を満たす。曲線選択補題から解析的曲線 $c : (0,1) \to S(a_r)$ で $\lim_{t\to 0} c(t) = z_0$ を満たすものが存在するが、この曲線にそって $|f|$ の値は一定で 0 にはならず、$\lim_{t\to 0} |f(c(t))| = |f(z_0)| = 0$ に反する。 □

Proposition 3. 実数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して、$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ を満たす任意の ε について、a_ε は臨界点を持たない。

Proof. Mixed polynomial f の定数項は 0 であり $|z_j| = |\overline{z_j}| \leq \|z\|$ なので、三角不等式から $|f(z)| \leq F(\|z\|)$ を満たす非負実数係数多項式 $F(x)$ で定数項が 0 であるものが存在する。多項式 F は $x \geq 0$ で単調増加なので、実数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ を満たす任意の ε について、$z \in B_\varepsilon$ ならば $|f(z)| < \eta$ が成り立つ。よって Lemma 2 より a_ε は臨界点を持たない。 □

$\varepsilon_0 > 0$ を十分小さくとって、$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ を満たす任意の ε について、mixed polynomial f, g から定義された写像

$$\mathrm{Re}\log f : B_\varepsilon \setminus V_f \to \mathbb{R},\ \mathrm{Re}\log g : B_\varepsilon \setminus V_g \to \mathbb{R}$$

が臨界点を持たないと仮定する。これらから写像

$$\Phi = (\mathrm{Re}\log f, \mathrm{Re}\log g) : B_\varepsilon \setminus V_{fg} \to \mathbb{R}^2$$

を構成する。$B_\varepsilon \setminus V_{fg}$ の点 p が Φ の特異点になる為の必要十分条件は、次で与えられる。

Proposition 4. p を $B_\varepsilon \setminus V_{fg}$ の点とする。p が Φ の特異点になる為の必要十分条件は、$\overline{d\log f} + \bar{d}\log f$ と $\overline{d\log g} + \bar{d}\log g$ が p で $\mathbb{R}$ 上一次従属になることである。特に f, g が複素多項式の場合、p で $gdf,\ fdg$ が $\mathbb{R}$ 上一次従属になることである。

Example. $f = z_1^3 + z_2^2,\ g = z_1^2 + z_2^3$ の場合を考える。まず gdf と fdg が $\mathbb{C}$ 上一次従属になる点を見つけ、その中から $\mathbb{R}$ 上一次従属になるよう条件付けを行う。計算を行うことにより、

$$gdf = \left(z_1^2 + z_2^3\right)\left(3z_1^2, 2z_2\right) = \left(3z_1^4 + 3z_1^2 z_2^3, 2z_1^2 z_2 + 2z_2^4\right),$$

$$fdg = \left(z_1^3 + z_2^2\right)\left(2z_1, 3z_2^2\right) = \left(2z_1^4 + 2z_1 z_2^2, 3z_1^3 z_2^2 + 3z_2^4\right),$$

$$\det\begin{pmatrix} gdf \\ fdg \end{pmatrix} = z_1 z_2 \left(z_1^2 + z_2^3\right)\left(z_1^3 + z_2^2\right)(9z_1 z_2 - 4)$$

を得る。$B_\varepsilon \setminus V_{fg}$ 上では $f(z), g(z) \neq 0$ より、Φ の特異点は $z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ z_1 z_2 = 4/9$ のどれかを満たす必要がある。$z_1 = 0$ の場合、$gdf = \left(0, 2z_2^4\right),\ fdg = \left(0, 3z_2^4\right)$ なのでこれらは $\mathbb{R}$ 上一次従属。$z_2 = 0$ の場合、$gdf = \left(3z_1^4, 0\right),\ fdg = \left(2z_1^4, 0\right)$ なのでこれらは $\mathbb{R}$ 上一次従属。$z_1 z_2 = 4/9$ の場合、$z_1 = x,\ z_2 = 4/9x$ を代入して

$$gdf = \left(z_1^2 + z_2^3\right)\left(3z_1^2, 2z_2\right) = \frac{729x^5 + 64}{6561x^4}\left(27x^3, 8\right),$$

$$fdg = \left(z_1^3 + z_2^2\right)\left(2z_1, 3z_2^2\right) = \frac{162x^5+32}{2187x^4}\left(27x^3, 8\right)$$

を得る。gdf と fdg が $\mathbb{R}$ 上一次従属になる為には、

$$\frac{729x^5+64}{6561x^4} \Big/ \frac{162x^5+32}{2187x^4} = \frac{729x^5+64}{486x^5+96} = s$$

が実数になることが必要十分である。よって 1 の 5 乗根 ω_5 と実数 $s \neq 2/3, 3/2$ について、

$$z_1 = x = -\frac{2}{3}\omega_5 \sqrt[5]{\frac{3s-2}{2s-3}},\ z_2 = \frac{4}{9x} = -\frac{2}{3}\omega_5^{-1}\sqrt[5]{\frac{2s-3}{3s-2}}$$

を満たす点 $p \in B_\varepsilon \setminus V_{fg}$ が Φ の特異点になる。今得た $z_1 z_2 = 4/9$ の場合の特異点は、ε_0 を十分小さくとると存在しないことがわかる。よって $S(\Phi) = (B_\varepsilon \setminus V_{fg}) \cap V_{z_1 z_2}$ を得る。

Theorem 5. *Mixed polynomial* f, g は *radially weighted homogeneous* で、その *weights* が共に $(r_1, \ldots, r_n)$ で *degrees* がそれぞれ d_f, d_g であるとする。$\mathbb{C}^n$ における $\overline{d \log f} + \bar{d} \log f$ の直交補空間の基底 $\{v_1, \ldots, v_{2n-1}\}$ を並べた行列を $K \in M(2n-1, n, \mathbb{C})$ とする。$d_f \log g - d_g \log f$ の変数 $z_1, \ldots, z_n, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}$ についてのヘッセ行列を $H \in M_{2n}(\mathbb{C})$ とする。$W = \left(K, \overline{K}\right)$ とし、W の転置行列を W^T で表す。このとき Φ の特異点 p が折り目特異点であることと、$\mathrm{Re}\left(WHW^T\right)$ が p で正則行列になることは同値である。

Proof. 証明の概略のみ述べる。

$$f\left(t^{r_1} z_1, \ldots, t^{r_n} z_n\right) = t^{d_f} f\left(z_1, \ldots, z_n\right),\ g\left(t^{r_1} z_1, \ldots, t^{r_n} z_n\right) = t^{d_g} g\left(z_1, \ldots, z_n\right)$$

より、$(t; r)(z) = \left(t^{r_1} z_1, \ldots, t^{r_n} z_n\right)$ と定義すると、

$$\mathrm{Re} \log f\left(\left(e^u; r\right)(z)\right) = d_f u + \mathrm{Re} \log f(z),\ \mathrm{Re} \log g\left(\left(e^u; r\right)(z)\right) = d_g u + \mathrm{Re} \log g(z),$$

が成り立つので

$$\mathrm{Re} \log f\left(\left(e^u; r\right)(z)\right) = d_f u + \mathrm{Re} \log f(z),$$
$$\left(d_f \mathrm{Re} \log g - d_g \mathrm{Re} \log f\right)\left(\left(e^u; r\right)(z)\right) = d_f \mathrm{Re} \log g(z) - d_g \mathrm{Re} \log f(z)$$

を得る。この式から Φ の特異点 p の近くでの $B_\varepsilon \setminus V_f$ の局所座標を、radially action 方向の座標成分 x_1 とそれと横断的な方向の座標成分 $x_2, \ldots, x_{2n}$ に分けたとき、Φ の特異点 p が関数 $d_f \mathrm{Re} \log g - d_g \mathrm{Re} \log f$ の座標 $x_2, \ldots, x_{2n}$ についての非退化臨界点であることと、p が Φ の折り目特異点になることが同値になる。この事実を式で書き下すと、定理の主張を得る。 □

参考文献

[1] Golubitsky, Martin, and Victor W. Guillemin. Stable mappings and their singularities. Springer, 1973.

[2] Oka, Mutsuo. "Topology of polar weighted homogeneous hypersurfaces." Kodai Mathematical Journal 31.2 (2008): 163-182.

[3] Oka, Mutsuo. "Non-degenerate mixed functions." Kodai Mathematical Journal 33.1 (2010): 1-62.

[4] Milnor, John Willard. Singular points of complex hypersurfaces. No. 61. Princeton University Press, 1968.