切断イデアルに対応する半群環のstrongly Koszul性について

柴田 和樹　(立教大学大学院理学研究科)*

1. Introduction

$G = ([n], E(G))$ を有限単純連結グラフとする．ここで, $[n] = \{1, \ldots, n\}$ を頂点集合, $E(G)$ を辺集合とする．このとき, $[n]$ の 2 つの部分集合 A, $B (A \cup B = [n]$, $A \cap B = \emptyset)$ に対し, $(0,1)$-ベクトル $\delta_{A|B}(G) \in \mathbb{Z}^{|E(G)|}$ を以下のように定義する:

$$\delta_{A|B}(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } |A \cap \{i,j\}| = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (ij \in E(G)).$$

また,

$$X_G = \left\{ \begin{pmatrix} \delta_{A_1|B_1}(G) \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \delta_{A_N|B_N}(G) \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{Z}^{|E(G)|+1} \quad (N = 2^{n-1})$$

と置く．次に, K を体とし, 多項式環 $K[q]$, $K[s,T]$ を

$$\begin{aligned} K[q] &= K[q_{A_1|B_1}, \ldots, q_{A_N|B_N}] \\ K[s,T] &= K[s, t_{ij} \mid ij \in E(G)] \end{aligned}$$

と定義する．このとき, 環準同型写像 π_G を

$$\pi_G \;:\; K[q] \to K[s,T] \quad q_{A_l|B_l} \mapsto s \cdot \prod_{\substack{|A_l \cap \{i,j\}|=1 \\ ij \in E(G)}} t_{ij}$$

と定める．このとき, $I_G = \ker \pi_G$ を G の**切断イデアル**といい, $R_G = K[q]/I_G$ を X_G の**トーリック環**という (see [5])．この R_G, I_G の環論的性質とグラフの組み合わせ論的構造を関連付ける結果が存在する．

Theorem 1.1 ([5]). *任意の逆辞書式順序に関し, I_G のイニシャルイデアルがsquarefreeであることと, G が K_5-minorをもたず, G のすべての誘導サイクルの長さは 4 以下であることは同値.*

Theorem 1.2 ([1]). *切断イデアル I_G が 2 次生成であることの必要十分条件は, G が K_4-minorをもたないことである.*

更に, ring graphに付随する切断イデアルは2次グレブナー基底をもつことも知られている (see [3])．しかし, 一般にいつ I_G が2次グレブナー基底をもつのかどうか自明な場合, ring graph以外では知られていない．

---

* 〒171-8501 東京都豊島区西池袋 3-34-1
e-mail: `12rc003c@rikkyo.ac.jp`

2. Strongly Koszul algebras and clique sums

Strongly Koszul 代数はHerzog-Hibi-Restucciaによって定義された概念である (see [2]). 今回は同値な条件をstrongly Koszul代数の定義とする.

トーリック環$R = K[u_1, \ldots, u_n]$が**strongly Koszul**であるとは, 以下の条件を満たすときにいう:

- 任意の$1 \leq i \neq j \leq n$に対し, イデアル$(u_i) \cap (u_j)$が2次生成.

一般的にトーリック環Rとその定義イデアルIに対し,

$$
\begin{array}{c}
I \text{が2次グレブナー基底を持つ, or } R \text{がstrongly Koszul} \\
\Downarrow \\
R \text{は Koszul} \\
\Downarrow \\
I \text{は2次生成.}
\end{array}
$$

が成り立つことが知られている. 更に, 以下の予想が存在する.

Conjecture 2.1. *トーリック環Rがstrongly Koszulならば, 定義イデアルIは2次グレブナー基底を持つ.*

Proposition 2.2 ([2, Proposition 2.3])**.** *P, Rをトーリック環とし, QをP, Rのテンソル or Segre積とする. このとき, Qがstrongly Koszulであることと, P, Rがstrongly Koszulであることは同値である.*

Proposition 2.3. *有限単純連結グラフGに対し, R_Gはstrongly Koszulであるとする. このとき,*

(1) *H_1がGのcontractionならば, R_{H_1}はstrongly Koszul;*

(2) *H_2がGの誘導部分グラフならば, R_{H_2}はstrongly Koszul.*

$G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$を$V_1 \cap V_2$が2つのグラフのcliqueであるような有限連結グラフとする. このとき, $G_1 \# G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$を$G_1, G_2$の**clique sum**という. また, $|V_1 \cap V_2| = k + 1 (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$のとき, $G_1 \# G_2$をk**-sum**とも呼ぶ.

Proposition 2.4. *切断イデアルI_{G_1}, I_{G_2}が2次生成 (resp. 2次グレブナー基底をもつ)ならば, $I_{G_1 \# G_2}$も2次生成 (resp. 2次グレブナー基底をもつ).*

Proposition 2.5. *$R_{G_1 \# G_2}$がstrongly Koszulならば, R_{G_1}, R_{G_2}もstrongly Koszulである.*

0-sumのときは, 上の命題の逆も成り立つ. しかし, 1-sumの場合は, 逆が成り立たないような例が存在する.

K_nをn点完全グラフ, C_nをnサイクル, $K_{l_1, \ldots, l_m}$を完全m-部グラフとする.

Example 2.6. *$G_1 = C_3 \# C_3 (= K_4 \setminus e)$, $G_2 = C_4 \# C_3$, $G_3 = (K_4 \setminus e) \# C_3$を図1-3のグラフとする. 初めに, R_{C_3}, R_{C_4}, R_{G_1}はすべてstrongly Koszulとなる. しかし, R_{G_2}, R_{G_3}は共にstrongly Koszulとはならない.*

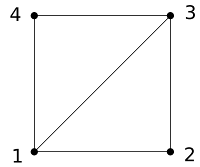

図 1: $C_3\#C_3$

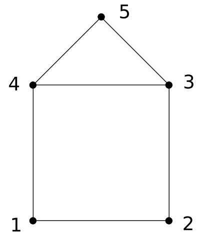

図 2: $C_4\#C_3$

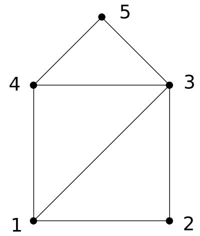

図 3: $(K_4 \setminus e)\#C_3$

3. 主結果

本講演の目的は

- I_G が 2 次グレブナー基底をもつことの十分条件
- R_G が strongly Koszul であるための必要十分条件

をグラフの言葉で表すことである．そのために, 以下の 2 つの補題を紹介する．

Lemma 3.1. 有限単純グラフ G が 2-連結でないならば, $G = G_1\#\cdots\#G_s$ となる G の 2-連結成分 $G_1, \ldots, G_s$ が存在する．ここで, $\#$ を 0-sum とする．

Lemma 3.2. 有限単純 2-連結グラフ G に対し, 以下は同値.

- (K_4, C_5)-minor をもたない;
- G は K_3, $K_{2,n-2}$, $K_{1,1,n-2}$ $(n \geq 4)$ のいずれか.

また,

- $I_{K_2} = I_{K_3} = \langle 0 \rangle$
- $R_{K_{1,1,n-2}} \cong R_{K_{1,n-2}} \otimes_K R_{K_{1,n-2}}$
- $R_{K_{1,n-2}}$ は R_{K_2} の $n-2$ 個の Segre 積と同型

であることが従う．よって, $K_{2,n-2}$ について調べれば良い．

$<$ を $q_{A|B} < q_{C|D}$ $(\min\{|A|,|B|\} < \min\{|C|,|D|\})$ をみたす $K[q]$ 上の逆辞書式順序とする．このとき, 以下の定理が成り立つ．

Theorem 3.3 ([4])**.** $G = K_{2,n-2}$ を頂点集合 $V_1 \cup V_2$ 上の完全 2 部グラフとする．ここで, $V_1 = \{1, 2\}$, $V_2 = \{3, \ldots, n\}$ $(n \geq 4)$ とする．このとき, 切断イデアル I_G の $<$ に関するグレブナー基底は以下の二項式全体からなる:

$$
\begin{array}{cc}
q_{A|B}q_{E|F} - q_{\emptyset|[n]}q_{\{1,2\}|\{3,\ldots,n\}} & (1 \in A, 2 \in B) \\
q_{A|B}q_{C|D} - q_{A\cap C|B\cup D}q_{A\cup C|B\cap D} & (1 \in A \cap C, 2 \in B \cap D, A \not\subset C, C \not\subset A) \\
q_{A|B}q_{C|D} - q_{A\cap C|B\cup D}q_{A\cup C|B\cap D} & (1, 2 \in A \cap C, A \not\subset C, C \not\subset A)
\end{array}
$$

ここで, $E = (B \cup \{1\}) \setminus \{2\}$, $F = (A \cup \{2\}) \setminus \{1\}$ とする．また, 各二項式のイニシャル単項式は最初の単項式である．

以上より, 以下の結果を得る

Corollary 3.4 ([4]). 有限単純連結グラフ G が (K_4, C_5)-minor をもたないならば, I_G は2次グレブナー基底をもつ.

Theorem 3.5 ([4]). トーリック環 R_G が strongly Koszul であるための必要十分条件は, G が (K_4, C_5)-minor をもたないことである.

Corollary 3.6 ([4]). トーリック環 R_G が strongly Koszul ならば, I_G は2次グレブナー基底をもつ.

Corollary 3.7 ([4]). トーリック環 R_G が strongly Koszul ならば, $R_{G\setminus e}$ も strongly Koszul である. ここで, $G \setminus e$ は G の e での deletion とする.

Corollary 3.6 は Conjecture 2.1 の部分的な解決となっている.

参考文献

[1] A. Engström, Cut ideals of K_4-minor free graphs are generated by quadrics, *Michigan Math. J.*, **60** (2011), no. 3, 705-714.

[2] J. Herzong, T. Hibi and G. Restuccia, Strongly Koszul algebras, *Math. Scand.*, **86** (2000), 161-178.

[3] U. Nagel and S. Petrović, Properties of cut ideals associated to ring graphs, *J. Commutative Algebra* **1** (2009), no. 3, 547-565.

[4] K. Shibata, Strong Koszulness of the toric ring associated to a cut ideal, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, to appear.

[5] B. Sturmfels and S. Sullivant, Toric geometry of cuts and splits, *Michigan Math. J.*, **57** (2008), 689-709.