GKM 理論を用いた同変ファイバー束の解析について

佐藤 敬志 [*]

概 要

今回の講演ではトーラスが作用している空間の同変コホモロジーを決定する強力な方法として GKM 理論を少し解説した後, 良いファイバー束を GKM 理論的に解析する手法について述べる。その応用として例外型旗多様体 F_4/T の整係数同変コホモロジーを明示的に与える。

1 イントロダクション

G をコンパクトで連結な Lie 群とし、T をその極大トーラスとする。等質空間 G/T は旗多様体であり、T が左からの積で作用している。Goresky, Kottwitz, MacPherson [GKM] は G/T を含む良い空間のクラスに対してその $\mathbb{C}$-係数同変コホモロジーを決定する強力な方法を与えた。

位相空間 X に群 Γ が作用しているとき、X の同変コホモロジー $H^*_\Gamma(X)$ を $H^*(E\Gamma \times_\Gamma X)$ として定義する。ここで $E\Gamma$ は Γ の自由な作用を持つ弱可縮な空間とする。固定点集合 $(G/T)^T$ は G の Weyl 群 $W(G)$ と同一視できるので, 包含 $i\colon (G/T)^T \to G/T$ は次の環準同型を誘導する

$$i^*\colon H^*_T(G/T) \to H^*_T((G/T)^T) = \prod_{W(G)} H^*(BT) = \mathrm{Map}(W(G), H^*(BT)).$$

複素数係数の場合、この i^* 写像は localization theorem によって単射であることが分かる (cf. [H, Theorem (III.1)]). ゆえに i^* の像を求めれば複素数係数同変コホモロジー $H^*_T(G/T)$ が決定でき、GKM 理論はその像をなす元の条件を記述する。Guillemin と Zara による GKM 理論の主張の言い換え [GZ, Theorem 1.7.3] によると、i^* の像は G から得られるグラフで完全に決定できる。特に G を単純でかつ C 型でないとすると、Harada, Henriques, Holm [HHH] は上の方法が整係数でも適用できることを示した。以下、全ての議論は整係数で行われている。

2 GKM 理論

R を環とする。辺に R の元が付随しているグラフ $\mathcal{G} = (V, E)$ に対して集合間の写像 $f\colon V \to R$ を考える。本稿でのグラフは多重辺を許す。f がグラフ $\mathcal{G}$ 上の GKM 関数である

[*] t-sato@math.kyoto-u.ac.jp

とは、任意の辺 e $(= vv')$ に対し

$$f(v) - f(v') \in (\alpha(e)) \tag{2.1}$$

が成り立つときに言う。ここで $\alpha(e)$ は辺 e に付随した R の元、また $(x_1, \ldots, x_n)$ は $x_1, \ldots, x_n$ によって生成されるイデアルを表す。$\mathcal{G}$ 上の GKM 関数全体の集合は $\mathrm{Map}(V, R)$ の部分環をなす。和と積は各成分ごとのそれらで定義されることに注意。この部分環を $H^*(\mathcal{G})$ と書き、グラフ $\mathcal{G}$ のコホモロジー環と呼ぶ。

自然な同一視

$$\mathrm{Hom}(T, S^1) \cong H^2(BT) \ (= H^2(BT; \mathbb{Z}))$$

により、G のルートやウェイトを $H^2(BT)$ の元とみなす。$W(G)$, $\Phi(G)$ で G の Weyl 群、ルート系をそれぞれ表すこととする。$W(G)$ は通常の作用で $\mathrm{Hom}(T, S^1)$ に作用しており、それゆえ $\Phi(G)$ にも作用している。$H^*(BT)$ は 2 次の元で生成されているので、この作用は自然に $H^*(BT)$ へ拡張される。$\alpha \in \Phi(G)$ に対応する鏡映を $\sigma_\alpha \in W(G)$ で表す。旗多様体 G/T の GKM グラフを次で定義する。

Definition 2.1. G/T の GKM グラフ $\mathcal{G}(G/T)$ の頂点集合は $W(G)$ である。頂点 w, $w' \in W(G)$ と正ルート $\alpha \in \Phi(G)$ が存在して $w' = \sigma_\alpha w$ が成立すればその時に限り w と w' を結ぶ辺でコホモロジー類 $\alpha \in H^*(BT)$ が付随しているものがただ 1 つ存在する。そのコホモロジー類 α をその辺のラベルと呼ぶ。

$\mathcal{G}(G/T)$ の頂点は G/T の固定点に対応しており、辺は T 作用で不変な 2 次元球面に対応している。この球面は各固定点における接空間のルート空間分解と対応した各 (実) 2 次元部分空間の exp の像として得られる。また、ラベルはこのルートに対応しており、各辺に対して GKM 関数の満たすべき条件 (2.1) は対応する 2 次元球面の同変コホモロジーをその固定点に制限した時のその像の満たす条件である。特に旗多様体 G/T には Bruhat 分解と呼ばれる偶数次元の同変なセルからなるセル分割が存在し、セルは Weyl 群の元と一対一対応している。G が良い性質を持つ時、各セルを貼り付けて生じる条件は上で述べた 2 次元球面から来るものであることが示される。さらに T を含む閉部分 Lie 群 H に対しても同様に GKM グラフ $\mathcal{G}(G/H)$ を定義でき、その同変コホモロジーについても上で述べたとおりである。$H^*(BT)$ は次数付き環であり、$\mathcal{G}(G/H)$ のラベルは全て 2 次の斉次元なので $H^*(\mathcal{G}(G/H))$ は次数付き環となる。

Harada, Henriques, Holm は Guillemin と Zara による GKM 理論の言い換えを整係数の場合に拡張し、次の定理を得た。

Theorem 2.1 ([HHH, Theorem 3.1 and Lemma 5.2])**.** G の任意の 2 つの正ルートが $H^*(BT)$ において互いに素とする。このとき

$$H_T^*(G/H) \cong H^*(\mathcal{G}(G/H)).$$

3 GKM ファイバー束

Guillmin, Sabatini, Zara [GSZ] による良いファイバー束を GKM 理論的に解析する手法を整係数の場合に具体例を通じて考える。T^n を $U(n)$ の標準的な極大トーラスとし、T を T^n と $SU(n)$ の共通部分として定める。T は $SU(n)$ の極大トーラスである。$t_1, \ldots, t_n$ を標準的な $H^2(BT^n)$ の基底とし、$H^2(BT^n) \to H^2(BT)$ でのそれらの像を同じ記号で書く。$H^2(BT)$ においては $\sum_{i=1}^n t_i = 0$ が成立する。さらに GKM 関数 $\tau_i \colon W(G) \to H^*(BT)$ を

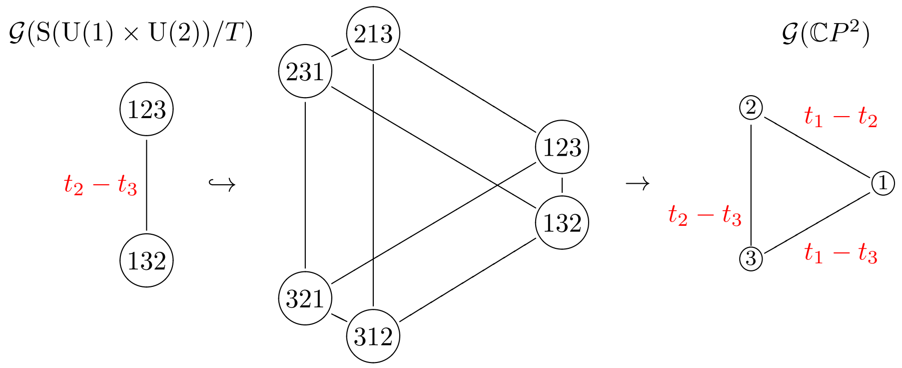
$$\tau_i(w) = w(t_i)$$

で定める。

さて、具体的にファイバー列 $S(U(2) \times U(1))/T \to SU(3)/T \to \mathbb{C}P^2$ を考える。福川・石田・枡田 [FIM] の結果により、一般の n で

$$H_T^*(SU(n)/T) \cong H^*(BT)[\tau_i \mid 1 \le i \le n]/(c_i(\tau) - c_i(t) \mid 1 \le i \le n) \tag{3.1}$$

であることが示される。ここで c_i は i 次基本対称多項式を表している。上のファイバー列を GKM グラフとその間の準同型として描くと次のようになる。ここで ijk という表記は $\sigma(t_1) = t_i$, $\sigma(t_2) = t_j$, $\sigma(t_3) = t_k$ なる $W(SU(3)) \cong \mathfrak{S}_3$ の元 σ を表す。また、赤い $H^*(BT)$ の元はラベルを表す。$\mathcal{G}(\mathbb{C}P^2)$ の頂点集合は $W(SU(3))/\{123, 132\}$ である。図では代表元の 1 文字目でその頂点を表している。



頂点の表し方からも明らかなように τ_1 は $\mathcal{G}(\mathbb{C}P^2)$ 上の GKM 関数とみなせ、$H^*(BT)$ 上 $H^*(\mathcal{G}(\mathbb{C}P^2))$ を生成することが容易に分かる。そして、その関係式は $\prod_{i=1}^3(\tau_1 - t_i) = 0$ で尽くされていることが分かる。

一方、(3.1) によりファイバー $S(U(2) \times U(1))/T \cong SU(2)/T'$ の同変コホモロジーの生成元は τ_2, τ_3 であり、関係式は $\tau_2 + \tau_3 = t_2 + t_3$, $\tau_2\tau_3 = t_2 t_3$ で尽くされている。ここで T' は $SU(2)$ の標準的な極大トーラスを表す。また、このファイバー上では $\tau_1 = t_1$ となっていることを注意しておく。

さて、全空間 $SU(3)/T$ の同変コホモロジーは τ_1 および τ_2, τ_3 で生成されているが、これは底空間とファイバーの生成元であった。t_i, τ_i $(1 \le i \le 3)$ に関する基本対称多項式について $c_1(\tau) = c_1(t)$ および $c_2(\tau) = c_2(t)$ がファイバーへの制限写像によりファイバーの関係式に移る

ことは上の注意から明らかである。さらに底空間の関係式 $\prod_{i=1}^{3}(\tau_1 - t_i) = 0$ は $c_1(\tau) = c_1(t)$, $c_2(\tau) = c_2(t)$ のもとで

$$\begin{aligned} 0 &= \prod_{i=1}^{3}(\tau_1 - t_i) \\ &= \tau_1^3 - c_1(t)\tau_1^2 + c_2(t)\tau_1 - c_3(t) \\ &= \tau_1^3 - c_1(\tau)\tau_1^2 + c_2(\tau)\tau_1 - c_3(\tau) + c_3(\tau) - c_3(t) \\ &= \prod_{i=1}^{3}(\tau_1 - \tau_i) + c_3(\tau) - c_3(t) \\ &= c_3(\tau) - c_3(t) \end{aligned}$$

を導く。

以上の観察により、全空間の生成元と関係式は本質的にファイバーと底空間のそれらから得られることが予想される。

今回の講演ではこの観察の具体的な定式化を行う（証明は [S2] で行われている）。そして、これを $\mathrm{Spin}(9)/T \to F_4/T \to \mathbb{O}P^2$ に適用することで F_4/T の整係数同変コホモロジーを具体的に得る (詳しくは [S1] を参照)。

参考文献

[FIM] Y. Fukukawa, H. Ishida, and M. Masuda, *The cohomology ring of the GKM graph of a flag manifold of classical type*, Kyoto J. Math. **54-3** (2014), 653-677.

[GKM] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localization theorem*, Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25-83.

[GSZ] V. Guillemin, S. Sabatini and C. Zara, *Cohomology of GKM fiber bundles*, J. Algebraic Combin. **35** (2012), no. 1, 19-59.

[GZ] V. Guillemin and C. Zara, *1-skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology*, Duke Math. J. **107** (2001), no. 2, 283-349.

[H] W. Y. Hsiang, *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 85. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[HHH] M. Harada, A. Henriques, and T. Holm, *Computation of generalized equivariant cohomologies of Kac-Moody flag varieties*, Adv. Math. **197** (2005), no 1, 198-221.

[S1] T. Sato, *The T-equivariant Integral Cohomology Ring of F_4/T*, Kyoto J. Math. **54-4** (2014), 703-726.

[S2] T. Sato, *The T-equivariant Integral Cohomology Ring of E_6/T*, arXiv:1406.3893.