等号付き多重ゼータ関数の非零領域

小野塚　友一　(名古屋大学)*

1. イントロダクション

近年、多くの数学者よって研究されている関数の一つとして多重ゼータ関数が挙げられる。多重ゼータ関数の中でも一番有名なのは次の Euler-Zagier 型多重ゼータ関数である。

$$\zeta_{EZ,k}(s_1,\ldots,s_k) := \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_k} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \cdots m_k^{s_k}}$$

そして今回発表する等号付き多重ゼータ関数は次のように定義される関数である。

$$\zeta_k^*(s_1,\ldots,s_k) := \sum_{0<m_1\leq m_2\leq\cdots\leq m_k} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \cdots m_k^{s_k}}$$

この等号付き多重ゼータ関数は名前の通り、Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の和の条件の不等号を等号付き不等号に置き換えた関数となっている。これらの関数は Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数や Apostol-Vu 型多重ゼータ関数といった多重ゼータ関数の一種である。これらの多重ゼータ関数を統一的に扱うために、ここではより一般化した関数として次の級数を考える。

$$F(s_1,\ldots,s_k;f) := \sum_{m_1,\ldots,m_k=1}^{\infty} \frac{f(m_1,\ldots,m_k)}{m_1^{s_1} \cdots m_k^{s_k}}$$

ただし $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{C}$ とする。これは Dirichlet 級数の多重化であるためここでは多重 Dirichlet 級数と呼ぶこととする。$u_{EZ}, u^* : \mathbb{N}^k \to \mathbb{C}$ をそれぞれ

$$u_{EZ}(m_1,\ldots,m_k) := \begin{cases} 1 & (m_1 < m_2 < \cdots < m_k), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

$$u^*(m_1,\ldots,m_k) := \begin{cases} 1 & (m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_k), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

と定めると $F(s_1,\ldots,s_k;u_{EZ}) = \zeta_{EZ,k}(s_1,\ldots,s_k)$、$F(s_1,\ldots,s_k;u^*) = \zeta_k^*(s_1,\ldots,s_k)$ が成り立つので、多重 Dirichlet 級数 F は確かに Euler-Zagier 型多重ゼータ関数や等号付き多重ゼータ関数の一般化となっていることがわかる。

　f がある条件を満たすときに多重 Dirichlet 級数 F の非零領域を得ることができたので今回はその結果を紹介する。この結果を用いることで等号付き多重ゼータ関数の非零領域を得ることができる。

*e-mail: m11022v@math.nagoya-u.ac.jp

2. 結果

定理2.1

f は $f(1,\dots,1)\neq 0$ を満たし、更にある定数 $C>0$ と $r_1,\dots,r_k\in\mathbb{R}$ が存在して $|f(m_1,\dots,m_k)|\le Cm_1^{r_1}m_2^{r_2}\cdots m_k^{r_k}$ が $(1,\dots,1)$ を除く全ての $(m_1,\dots,m_k)\in\mathbb{N}^k$ について成り立っているものとする。α_j を $\alpha_j>1+r_j$ $(j=1,\dots,k)$ と $\zeta(\alpha_1-r_1)\zeta(\alpha_2-r_2)\cdots\zeta(\alpha_k-r_k)\le 1+|f(1,\dots,1)|/C$ を満たすようにとる。このとき多重Dirichlet級数 $F(s_1,\dots,s_k;f)$ は次の領域を非零領域としてもつ。

$$\left\{(s_1,\dots,s_k)\in\mathbb{C}^k \mid \Re(s_j)>1+\alpha_j \quad (j=1,\cdots,k)\right\}$$

また、ある級数 $F(s_1,\dots,s_k;f^{-1})$ が存在して次の関係を満たす。

$$(F(s_1,\dots,s_k;f))^{-1}=F(s_1,\dots,s_k;f^{-1})$$

定理2.1の中に関数 f^{-1} が登場するが、これは通常の意味での逆関数ではないことに注意しておく。（関数 f^{-1} は f が与えられれば明示的に求められる関数である。）

この定理は f がいくつかの条件を満たすときに一般の多重Dirichlet級数 F を考えたが、f は同じ条件の下で、等号付き多重ゼータ関数の形の多重Dirichlet級数 F に制限して考えると求められる非零領域はより広くなる。そこで次のような集合を定義する。

$$\Omega^*:=\{f:\mathbb{N}^k\to\mathbb{C}\mid m_1\le\cdots\le m_k\text{を満たさないとき}f(m_1,\dots,m_k)=0\ \}$$

もし $f\in\Omega^*$ なら多重Dirichlet級数 F は次のように書け、等号付き多重ゼータ関数の形の級数になっていることがわかる。

$$F(s_1,\dots,s_k;f)=\sum_{0<m_1\le\cdots\le m_k}\frac{f(m_1,\dots,m_k)}{m_1^{s_1}\cdots m_k^{s_k}}$$

こういった級数に対する非零領域は次の定理2.2で述べるように定理2.1より広く取れることがわかる。

定理2.2

$f\in\Omega^*$ は定理2.1の条件を満たすものとし、$\alpha_1,\dots,\alpha_k$ は定理2.1と同様にとる．このとき多重Dirichlet級数 $F(s_1,\dots,s_k;f)$ は次の領域を非零領域としてもつ。

$$\left\{(s_1,\dots,s_k)\in\mathbb{C}^k \mid \Re(s_k(k-l+1))>l+\alpha_k(k-l+1) \quad (l=1,\dots,k)\right\}$$

ただし $\alpha_k(l)=\alpha_l+\alpha_{l+1}+\cdots+\alpha_k$ $(l=1,\dots,k)$ とし $s_k(l)$ も同様に定める。またある級数 $F(s_1,\dots,s_k;f^{-1})$ $(f^{-1}\in\Omega^*)$ が存在して次の関係を満たす。

$$(F(s_1,\dots,s_k;f))^{-1}=F(s_1,\dots,s_k;f^{-1})$$

この定理から次の系が導ける。

系

$f \in \Omega^*$ は $|f(1,\dots,1)| = 1$ と $|f(m_1,\dots,m_k)| \le 1$ を満たすものとする。このとき多重 Dirichlet 級数 $F(s_1,\dots,s_k;f)$ は次の領域を非零領域としてもつ。

$$\left\{(s_1,\dots,s_k) \in \mathbb{C}^k \mid \Re(s_k(k-l+1)) > l + \alpha_k(k-l+1) \quad (l = 1,\dots,k)\right\} \tag{1}$$

ただし $\alpha_i > 1$ $(i = 1,\dots,k)$ は $\zeta(\alpha_1)\zeta(\alpha_2)\cdots\zeta(\alpha_k) \le 2$ を満たすようにとる。

これにより等号付き多重ゼータ関数 $\zeta_k^*(s_1,\dots,s_k)$ は領域 (1) を非零領域にもつことがわかる。またこの系は $f \in \Omega^*$、$|f(1,\dots,1)| = 1$、$|f(m_1,\dots,m_k)| \le 1$ の3つの条件を満たしていればよいので、例えば次のような級数も領域 (1) を非零領域にもつことがわかる。

$$L_k^*(s_1,\dots,s_k) := \sum_{0<m_1\le m_2\le\cdots\le m_k} \frac{\chi_1(m_1)\chi_2(m_2)\cdots\chi_k(m_k)}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}\cdots m_k^{s_k}}$$

ただし $\chi_1,\dots,\chi_k$ は Dirichlet 指標とする。

ではこれらの結果は等号付き多重ゼータ関数 $\zeta_k^*(s_1,\dots,s_k)$ のみでなく、Euler-Zagier 型多重ゼータ関数 $\zeta_{EZ,k}(s_1,\dots,s_k)$ に適用できないのだろうか、という疑問が思い浮かぶが残念ながらそれはできない。なぜかというと今まで紹介した定理や系を適用するための多重 Dirichlet 級数 $F(s_1,\dots,s_k;f)$ の関数 f の条件として $f(1,\dots,1) \ne 0$ が必要だったが、Euler-Zagier 型多重ゼータ関数 $F(s_1,\dots,s_k;u_{EZ}) = \zeta_{EZ,k}(s_1,\dots,s_k)$ の場合には $u_{EZ,k}(1,\dots,1) = 0$ であるため定理や系の適用条件を満たさないからである。