Derived categories and generalized complexes

小川 泰朗*

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科

概 要

複体とは 2-微分を有する次数付き対象のことで，数学の幅広い分野で応用されている．“ 2-微分 ”であることはどれほど本質的なのだろうか？本稿ではこの問に対する１つの解答を与える．即ち，反復代数 (repetitive algebra) を通じて構成される一般化された複体についても“ 良い ”ホモロジー群や導来圏が定義できることを示し，これらと通常の導来圏との関係について述べる．

1　2-複体の導来圏

単位元を有する結合的な環 R に対して，その導来圏 $\mathsf{D}(R)$ とは，環 R のホモロジー代数的構造を調べる際の良い枠組みとして Grothendieck のアイデアに基づき導入されたものである．基本的なアイデアは，複体の圏 $\mathsf{C}(R)$ においてホモロジー群の同型を誘導する射を同型射と見做す，というシンプルなものである．本節ではこの導来圏の構成について述べる．

本稿では簡単のため，環 R として体 k 上の有限次元代数のみを扱うものとする．右 R 加群の圏 $\mathrm{Mod}R$ における **(鎖) 複体**$X^\bullet$ とは，R 加群と R 準同型の列

$$X^\bullet = (\cdots \to X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \to \cdots)$$

で，全ての $i \in \mathbb{Z}$ について $d^{i+1}d^i = 0$ を満たすものを言う．複体 $X^\bullet$ の第 i 次の項を $(X^\bullet)^i = X^i$ と表すことにする．各 d^i を複体 $X^\bullet$ の微分というが，２つ合成すると 0 になることから，本稿ではしばしば **2-微分**と呼ぶことにする．合わせて複体のことも **2-複体**と呼ぶ．2-複体 $X^\bullet, Y^\bullet$ の間の射とは，次の図式で表されるように，各 i ごとの R 準同型 $f^i : X^i \to Y^i$ の集合で，それぞれ 2-微分と可換であるもの，つまり $d^i_Y f^i = f^{i+1} d^i_X$ が全ての i で成り立つものを言う．

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet : & \cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \cdots \\
Y^\bullet : & \cdots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "d_Y^{i-1}"'] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"'] & Y^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

2-複体及びそれらの間の射からなる圏を **2-複体の圏**と言い $\mathsf{C}(R)$ で表す．この 2-複体の圏 $\mathsf{C}(R)$ は懸垂と呼ばれる重要な関手を持つ．

定義 1.1. 2-複体 $X^\bullet$ に対して 2-複体 $\Sigma X^\bullet$ を，

$$(\Sigma X^\bullet)^i := (X^\bullet)^{i+1},\ d^i_{\Sigma X} := -d^i_X$$

で定義することで，自己同型関手 $\Sigma : \mathsf{C}(R) \to \mathsf{C}(R)$ を得る．これを**懸垂**と言う．

*m11019b@math.nagoya-u.ac.jp

懸垂とは，与えられた 2-複体を左に 1 つずらす操作のことである．以下のように図示しておくと分かり良い．

$$
\begin{aligned}
X^\bullet &= (\cdots \to X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} \overbrace{X^i}^{\text{第 } i \text{ 次}} \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \to \cdots) \\
\Sigma X^\bullet &= (\cdots \to X^{i} \xrightarrow{-d_X^{i}} \underbrace{X^{i+1}}_{\text{第 } i \text{ 次}} \xrightarrow{-d_X^{i+1}} X^{i+2} \to \cdots)
\end{aligned}
$$

逆に，右にずらす操作 Σ^{-1} を考えることも出来る．明らかに Σ と Σ^{-1} は互いに逆射になっている．

定義 1.2. 2-複体 $X^\bullet$ 及び任意の整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して，その (i 次) **ホモロジー群**を

$$H^i(X^\bullet) := \operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1}$$

と定める．

本稿ではこのホモロジー群を非常に重要な対象と考えることにする．然らば，2-複体の間の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ に誘導されるホモロジー群の間の射

$$H^i(f) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$$

が全ての i で 0 になるのはいつかを考えるのは自然なことであろう．

定義 1.3. 2-複体の間の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が **null-homotopic** であるとは，各 i ごとの R 準同型 $s^i : X^i \to Y^{i-1}$ が存在し，$f^i = d_Y^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ d_X^i$ となることを言う．

$$
\begin{tikzcd}
X^\bullet : & \cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i"] \arrow[dl, dotted, "s^i"'] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}"] \arrow[dl, dotted, "s^{i+1}"'] & \cdots \\
Y^\bullet : & \cdots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "d_Y^{i-1}"'] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"'] & Y^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

命題 1.4. 2-複体の間の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が null-homotopic であれば，これに誘導されるホモロジー群の間の射 $H^i(f)$ は，全ての i で 0 となる．

これは上記の問に対する十分条件を与えている．ホモロジー群に着目した場合，null-homotopic な射を最初から 0 と見做すことは自然なアイデアであり，これを実現するものがホモトピー圏である．以下のように構成される．2-複体の圏 $\mathsf{C}(R)$ において，null-homotopic な射を全て集めるとイデアル $\mathcal{I}$ を構成する．つまり合成可能な 3 つの射 f, g, h において，もし $f \in \mathcal{I}$ であれば，$g \circ f, f \circ h \in \mathcal{I}$ が成り立つのである．圏 $\mathsf{C}(R)$ をこのイデアル $\mathcal{I}$ で割ったものがホモトピー圏 $\mathsf{K}(R)$ である．

定義 1.5. **ホモトピー圏**$\mathsf{K}(R)$ とは，次の対象及び射空間で定義される．

(i) $\operatorname{Ob}(\mathsf{C}(R)) := \operatorname{Ob}(\mathsf{K}(R))$.

(ii) $\operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet)/\mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$.

ここで，$\mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$ は null-homotopic な射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ からなる $\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet)$ の部分群である．

後のために，null-homotopic な射の別の定義を与えておく．

定義 1.6. 2-複体 $P^\bullet \in \mathsf{C}(R)$ が **relative-projective** であるとは，次の形をした 2-複体 $P_i^\bullet$ の直和 $\bigoplus_{i \in I} P_i^\bullet$ と同型であることを言う．

$$P_i^\bullet = (\cdots \to 0 \to P_i = P_i \to 0 \to \cdots).$$

命題 1.7. 2-複体の圏 $\mathsf{C}(R)$ の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ について，以下は同値である．

(i) 射 f は null-homotopic である．

(ii) 射 f は，ある relative-projective な対象 $P^\bullet \in \mathsf{C}(R)$ を経由する．即ち，

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f_1"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & P^\bullet \arrow[r, "f_2"] & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

なる分解が存在する．

次にホモトピー圏の持つ 2 つの重要な性質について述べる．

命題 1.8. 加群圏 $\mathrm{Mod}R$ からホモトピー圏 $\mathsf{K}(R)$ への自然な埋め込み関手 $\iota : \mathrm{Mod}R \hookrightarrow \mathsf{K}(R)$ が存在する．この埋め込みは R 加群 X に対して，2-複体 $\iota X := (\cdots \to 0 \to \underbrace{X}_{\text{第 0 次}} \to 0 \to \cdots)$ を対応させるものである．

この埋め込み関手を通じて，任意の R 加群を自然に 2-複体と見做すことができる．

定義 1.9. 2-複体の圏 $\mathsf{C}(R)$ の懸垂 Σ は，ホモトピー圏 $\mathsf{K}(R)$ の自己同型関手を誘導する．これも記号を変えず $\Sigma : \mathsf{K}(R) \to \mathsf{K}(R)$ で表し，**懸垂**と呼ぶ．

命題 1.10. 2-複体 $X^\bullet \in \mathsf{K}(R)$ について，次の同型が存在する．

$$H^i(X^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(R)}(R, \Sigma^i X^\bullet).$$

ここで，R 加群 R を 2-複体と見做している．

次に 2-複体の間の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ に誘導される，ホモロジー群の間の射 $H^i(f) : H^i(X^\bullet) \cong H^i(Y^\bullet)$ が各 i で同型になるものを考える．

定義 1.11. ホモトピー圏 $\mathsf{K}(R)$ の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が**擬同型**であるとは，これに誘導される射 $H^i(f) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$ が各 i で同型になることを言う．

ホモトピー圏 $\mathsf{K}(R)$ において, 擬同型を同型と見做した圏を**導来圏**$\mathsf{D}(R)$ と言う．より精確には，擬同型射全体のクラス S を考え，S による $\mathsf{K}(R)$ の Verdier 局所化 $Q : \mathsf{K}(R) \to \mathsf{K}(R)[\mathsf{S}^{-1}] := \mathsf{D}(R)$ により定義される[1]．

注 1.12. 可換環 A とその積閉集合 S が与えられたとき，局所環 $R[S^{-1}]$ が定義できた．$R[S^{-1}]$ において，S に属する元は全て可逆元であった．実はこの操作を圏に拡張したものが上記の Verdier 局所化である．

次の命題はホモロジー代数を考える際，導来圏が良い枠組みを与えていることを示唆している．

命題 1.13. 2-複体 $X^\bullet \in \mathsf{D}(R)$ について，次の同型が存在する．

$$H^i(X^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(R)}(R, \Sigma^i X^\bullet).$$

ここで，R 加群 R を 2-複体と見做している．

命題 1.10 と同様の同型が導来圏でも成り立つ．つまり，導来圏は複体のホモロジー群の情報を射空間として有しているのである．

---

[1] Verdier 局所化及び導来圏の定義については，[Kra] が良い文献である．

2　N-複体の導来圏

本節では，2-微分の替わりに N-微分を有する N-複体を定義し，通常の 2-複体同様，ホモロジー群や導来圏が定義できることを述べる．さらに 2-複体の導来圏と N-複体の導来圏の関係について述べる．

本節を通じ $N \geq 2$ とする．加群圏 Mod$R$ における N-**複体**$X^\bullet$ とは，対象と射の列

$$\cdots \to X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \to \cdots$$

で，全ての i について $d^{i-N+1} \cdots d^{i+1} d^i = 0$ を満たすものを言う．N-**複体の圏**を $\mathsf{C}_N(R)$ と表す．

定義 2.1. N-複体 $X^\bullet$ の**ホモロジー群** $H^i_{(r)}(X^\bullet)$ を以下で定義する．正数 $r < N$ および $i \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\begin{aligned}
Z^i_{(r)}(X^\bullet) &:= \mathrm{Ker}(d^{i+r-1\cdots}d^i) \\
B^i_{(r)}(X^\bullet) &:= \mathrm{Im}(d^{i-1} \cdots d^{i-r}) \\
H^i_{(r)}(X^\bullet) &:= Z^i_{(r)}(X)/B^i_{(N-r)}(X)
\end{aligned}$$

2-複体の場合同様，N-複体の間の射にも null-homotopic が定義でき，これに誘導されるホモロジー群の間の射は 0 になる．

定義 2.2. N-複体の間の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が **null-homotopic** であるとは，各 i ごとに準同型 $s^i : X^i \to Y^{i-N+1}$ が存在し，

$$f^i = \sum_{j=1}^{N-1} d_Y^{i-1} \cdots d_Y^{i-N+j} s^{i+j-1} d_X^{i+j-2} \cdots d^i$$

となることを言う．

この定義式は少々複雑なので，例として 3-複体の null-homotopic 射を図示しておく．

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet : & \cdots \arrow[r] & X^{i-2} \arrow[r] \arrow[d] & X^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & X^i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dll, dotted, "s^i"'] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dll, dotted] & X^{i+2} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dll, dotted] & \cdots \\
Y^\bullet : & \cdots \arrow[r] & Y^{i-2} \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r] & Y^i \arrow[r] & Y^{i+1} \arrow[r] & Y^{i+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

各 i について，$f^i = d_Y^{i-1} d_Y^{i-2} s^i + d_Y^{i-1} s^{i+1} d_X^i + s^{i+2} d_X^{i+1} d_X^i$ が成立している．

命題 2.3. N-複体の間の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が null-homotopic であれば，これに誘導されるホモロジー群の間の射 $H^i_{(r)}(f)$ は，全ての i, r で 0 になる．

2-複体の場合同様，null-homotopic な射の全体はイデアル $\mathcal{I}$ をなし，N-複体のホモトピー圏が定義できる．N-**ホモトピー圏**$\mathsf{K}_N(R)$ とは，N-複体を対象とし，任意の N-複体 $X^\bullet, Y^\bullet$ に対し射空間を

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}_N(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_N(R)}(X^\bullet, Y^\bullet)/\mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

により定義したものである．命題 1.7 において，2-複体の圏 $\mathsf{C}(R)$ における射が null-homotopic であるとは，relative-projective な対象を経由することと同値であると述べた．N-複体の圏 $\mathsf{C}_N(R)$ においても同様の特徴付けが可能である．$\mathsf{C}_N(R)$ における **relative-projective** な対象 $P^\bullet$ とは次の形をした対象 $P_i^\bullet$ の直和 $\bigoplus_{i \in I} P_i^\bullet$ と同型であるものを言う．

$$P_i^\bullet = (\cdots \to 0 \to \underbrace{P_i = P_i = \cdots = P_i}_{N\ 個} \to 0 \to \cdots)$$

続いて，2-複体の場合を真似て N-複体の導来圏を定義する．

定義 2.4. N-ホモトピー圏 $\mathsf{K}_N(R)$ の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が**擬同型**であるとは，これに誘導される射 $H^i_{(r)}(f) : H^i_{(r)}(X^\bullet) \to H^i_{(r)}(Y^\bullet)$ が各 i, r がで同型になることを言う．

擬同型射全体 S による Verdier 局所化 $\mathsf{K}_N(R)[\mathsf{S}^{-1}]$ が N**-導来圏**$\mathsf{D}_N(R)$ である．通常の導来圏と同様，直観的には N-ホモトピー圏において，擬同型を同型と見做した圏である．

環 R に対して，通常の導来圏 $\mathsf{D}(R)$ と N-導来圏 $\mathsf{D}_N(R)$ の関係を調べるのは自然なことであろう．次の結果が知られている．

定理 2.5. [IKM] 次の圏同値が存在する[2]．

$$\mathsf{D}_N(R) \simeq \mathsf{D}(\mathbb{T}_{N-1}(R)).$$

ここで，$\mathbb{T}_{N-1}(R)$ は上三角行列環 $\begin{pmatrix} R & \cdots & R \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & R \end{pmatrix}$ である．

この定理は環 R の N-導来圏 $\mathsf{D}_N(R)$ が，環を取り換えることで通常の導来圏として実現できることを意味する．即ち，環 R 上で N-複体のホモロジー代数を行うことは，上三角行列環 $\mathbb{T}_{N-1}(R)$ 上で通常のホモロジー代数を行うことと同じである．

3 $\hat{A}$-複体の導来圏

本節では，N-複体をさらに一般化するための道具として反復代数 (repetitive albebra) を導入する．その動機付けの説明をするために，先ずは N-複体の圏を以下のように捉え直す．

次の有向グラフと関係式を考える．

$$\cdots \to \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \to \cdots, \ d^N = 0 \tag{1}$$

直観的な説明ではあるが，この有向グラフの点 $\bullet$ に R 加群，矢印 $\to$ に R 準同型を，関係式 $d^N = 0$ を満たすように貼り付けると N-複体が出来る．これらを全て集めたものが N-複体の圏 $\mathsf{C}_N(R)$ である．

数学的にきちんとした定義も可能で，有向グラフ (1) に誘導される k-線型圏 $\mathcal{N}$ に対して，$\mathcal{N}$ から $\mathrm{Mod}R$ への共変関手全体からなる圏を $\mathcal{F}un_k(\mathcal{N}, \mathrm{Mod}R)$ を考える．このとき，圏同値 $\mathcal{F}un_k(\mathcal{N}, \mathrm{Mod}R) \simeq \mathsf{C}_N(R)$ を得る．

(1) のような “良い” 有向グラフを作るための道具が反復代数である．

定義 3.1. [Hap, HW] 標準 k 双対を $D := \mathrm{Hom}_k(-, k)$ を表す．有限次元 k 代数 A に対して，その**反復代数**$\hat{A}$ とは，ベクトル空間

$$\hat{A} := \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A\right) \oplus \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} DA\right)$$

に以下で積を定めたものである．ベクトル空間 $\hat{A}$ の元 $(a_i, \varphi_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (b_i, \psi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ に対し，

$$(a_i, \varphi_i)_{i\in\mathbb{Z}} \cdot (b_i, \psi_i)_{i\in\mathbb{Z}} := (a_i b_i, a_{i+1}\psi_i + \varphi_i b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

と定める．

[2] より精確には，$\mathsf{D}_N(R)$ 及び $\mathsf{D}(\mathbb{T}_{N-1}(R))$ は三角圏構造を有することが示される．即ち，この圏同値は三角同値である．

注 3.2. 反復代数 $\hat{A}$ の定義は，次のように考えておくと分かり良い．つまり，無限行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 & \\ & A & DA & & \\ & & A & DA & \\ & & & A & \ddots \\ \text{\Large 0} & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

に自然な積を定めたものである．

例 3.3. 反復代数 $\hat{A}$ の構造を表す有向グラフの例を見てみる．

(i) 体 k の反復代数 $\hat{k}$ の有向グラフは,

$$\cdots \to \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \to \cdots, \ d^2 = 0$$

で与えられる．この有向グラフに R 加群及び R 準同型を張り付けて得られるのは，通常の 2-複体である．従って，圏同値 $\mathcal{F}un_k(\hat{k}, \mathrm{Mod}R) \simeq \mathsf{C}(R)$ を得る．

(ii) 上三角行列環 $A = \begin{pmatrix} k & \cdots & k \\ & \ddots & \vdots \\ \text{\Large 0} & & k \end{pmatrix}$ の反復代数 $\hat{A}$ の有向グラフは,

$$\cdots \to \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \to \cdots, \ d^N = 0$$

で与えられる．つまり，圏同値 $\mathcal{F}un_k(\hat{A}, \mathrm{Mod}R) \simeq \mathsf{C}_N(R)$ を得る．

(iii) 行列環 $A = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ の反復代数 $\hat{A}$ を表す有向グラフは,

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr, "\alpha_{n-1}"] & & \bullet \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr, "\beta^*_{n-1}"] & & \bullet \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr, "\alpha_{n+1}"] & & \bullet & \\
\cdots & & \bullet \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ur, "\beta_{n-1}"'] \arrow[dr, "\alpha^*_{n-1}"'] & & \bullet \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ur, "\alpha^*_n"'] \arrow[dr, "\beta_n"'] & & \bullet \arrow[ur, "\beta_{n+1}"'] \arrow[dr, "\alpha^*_{n+1}"'] & & \cdots \\
 & \bullet \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ur, "\beta^*_{n-2}"] & & \bullet \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ur, "\alpha_n"] & & \bullet \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ur, "\beta^*_n"] & & \bullet &
\end{tikzcd}$$

及び関係式 $\beta_n\alpha_n = 0, \alpha^*_n\beta^*_{n-1} = 0, \alpha_{n+1}\alpha^*_n = \beta^*_n\beta_n$ により与えられる．

以下の例から分かるように反復代数が与えられれば，それを表現する有向グラフが得られる．この有向グラフに R 加群と R 準同型を貼り付けたものが $\hat{A}$-複体である．

定義 3.4. 反復代数 $\hat{A}$ を通じて定義した圏 $\mathcal{F}un_k(\hat{A}, \mathrm{Mod}R)$ を，**$\hat{A}$-複体の圏**といい $\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)$ で表す．

第１，２節同様，$\hat{A}$-複体に対しても null-homotopic 射を定義する．N-複体の場合は，実際に図式を使って null-homnotopic を定義することができた．しかし $\hat{A}$-複体の場合は，その形は A の取り方によって様々である．図式を使って定義することはできない．そこで利用するのが，relative-projective な対象を経由するという条件である（命題 1.7）.

定義 3.5. (i) 射影的な左 $\hat{A}$ 加群 P 及び R 加群 Z に対して，$P \otimes_k Z$ を次の方法で $\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)$ の対象と見做す．圏 $\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)$ の対象とは $\hat{A}$ から $\mathrm{Mod}R$ への関手であるから,

$$P \otimes_k Z : \hat{A} \xrightarrow{P} \mathrm{Mod}k \xrightarrow{-\otimes_k X} \mathrm{Mod}R.$$

と考えればよい．$P \otimes_k X$ の形で書ける $\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)$ の対象を **relative-projective** と言う．

(ii) 圏 $\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)$ の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が **null-homotopic** であるとは，f がある relative-projective な対象を経由することを言う．つまり，ある $P \otimes_k Z$ が存在し，

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f_1"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & P \otimes_k Z \arrow[r, "f_2"] & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

と分解できることを言う．

例 3.6. 例 3.3 の場合の relative-projective な対象 $P \otimes_k Z$ の形を見てみよう．

(i) $A = k$ の場合は，$\hat{A}$-複体は通常の 2-複体に他ならない．実際，relative-projective な対象は，

$$P \otimes_k Z = (\cdots \to 0 \to Z = Z \to 0 \to \cdots)$$

となる．

(ii) $A = \mathbb{T}_{N-1}(k)$ の場合は，$\hat{A}$-複体は N-複体であった．実際，

$$P \otimes_k Z = (\cdots \to 0 \to \underbrace{Z = Z = \cdots = Z}_{N \text{ 個}} \to 0 \to \cdots)$$

となる．

(iii) $A = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ の場合は，直既約射影的 $\hat{A}$ 加群 P の取り方で，次のいずれかの形になる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & Z \arrow[dr] & & 0 & \\ \cdots & & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Z \arrow[ur, equal] \arrow[dr] & & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\ & 0 \arrow[ur] & & Z \arrow[ur, equal] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & \end{tikzcd} \qquad \Bigg| \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & Z \arrow[dr, equal] & & 0 & \\ \cdots & & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Z \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & & Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\ & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & Z \arrow[ur, equal] & & 0 & \end{tikzcd}$$

null-homotopic 射全体はイデアル $\mathcal{I}$ を成す．$\hat{A}$**-ホモトピー**$\mathsf{K}_{\hat{A}}(R)$ とは $\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)$ をイデアル $\mathcal{I}$ で割ったもの，つまり射空間を

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}_{\hat{A}}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet)/\mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

としたものである．

$\hat{A}$-導来圏を定義するには，ホモロジー群と擬同型を定義する必要がある．しかしやはり $\hat{A}$-複体は形がはっきりと分からないため $\mathrm{Ker}\,\alpha / \mathrm{Im}\,\beta$ の形で定義することは出来ない．そこで，2-複体 $X^\bullet$ のホモロジー群 $H^i(X^\bullet)$ がホモトピー圏上の射空間 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(R)}(R, \Sigma^i X^\bullet)$ と同型であることに着目する（命題 1.10）．

定義 3.7. (i) $\hat{A}$ 加群 A 及び R 加群 R に対して，$\hat{A}$-複体 $A \otimes_k R$ を考える．このとき $\hat{A}$-複体 $X^\bullet$ の（i 次）**ホモロジー群**を，

$$H^i(X^\bullet) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(R)}(A \otimes_k R, \Sigma^i X^\bullet)$$

で定める．ここで Σ は $\mathsf{K}_{\hat{A}}(R)$ の**懸垂**である[3]．

(ii) $\hat{A}$-ホモトピー圏 $\mathsf{K}_{\hat{A}}(R)$ の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が**擬同型**であるとは，これに誘導される射 $H^i(f) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$ が各 i で同型になることを言う．

(iii) 擬同型全体 S による Verdier 局所化 $\mathsf{K}_{\hat{A}}(R)[\mathsf{S}^{-1}]$ を $\hat{A}$**-導来圏**$\mathsf{D}_{\hat{A}}(R)$ と言う．

[3] 2-複体の圏において懸垂とは 2-複体を左にずらす操作であった．しかし，$\hat{A}$-複体の懸垂はこのような簡単な記述にはならない．任意の $\hat{A}$-複体 $X^\bullet$ に対して，ある relative-projective な対象 $P \otimes_k Z$ 及び完全列 $0 \to X^\bullet \to P \otimes_k Z \to \Sigma X^\bullet \to 0$ がいつでも存在することが示される．この Σ が $\hat{A}$-ホモトピー圏と $\hat{A}$-導来圏の懸垂を導くのである．

最後に主結果として，$\hat{A}$-導来圏 $\mathsf{D}_{\hat{A}}(R)$ も環 R を取り換えることで通常の導来圏として，実現できることを述べる．

定理 3.8. 圏同値 $\mathsf{D}_{\hat{A}}(R) \simeq \mathsf{D}(A \otimes_k R)$ が存在する．

例 3.9. 上の圏同値 $F : \mathsf{D}_{\hat{A}}(R) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}(A \otimes_k R)$ による具体的な対象の対応例を挙げておく．例 3.3(iii) 同様，$A = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ の場合を考える．

<table>
<tr><th>$\hat{A}$-導来圏 $\mathsf{D}_{\hat{A}}(R)$</th><th>導来圏 $\mathsf{D}(A \otimes_k R)$</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{tikzcd}[sep=small]
& 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & 0 & \\
\cdots & & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & R^{\oplus 2} \arrow[ur] \arrow[dr, "{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)}"] & & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
& 0 \arrow[ur] & & R \arrow[ur, "{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}"] & & R^{\oplus 2} \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

</td><td>

$\cdots \to 0 \to A \otimes_k R \to 0 \to \cdots$

</td></tr>
<tr><td>

$$\begin{tikzcd}[sep=small]
& 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & X \arrow[dr] & & 0 & \\
\cdots & & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & X \arrow[ur, equal] \arrow[dr] & & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
& 0 \arrow[ur] & & X \arrow[ur, equal] & & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

</td><td>

$\cdots \to 0 \to X = X \to 0 \to \cdots$

</td></tr>
<tr><td>

$$\begin{tikzcd}[sep=small]
& 0 \arrow[dr] & & X \arrow[dr, "\alpha"] & & Z \arrow[dr] & & 0 & \\
\cdots & & X \arrow[ur, equal] \arrow[dr, "\alpha"] & & Y \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr] & & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
& 0 \arrow[ur] & & Y \arrow[ur, equal] & & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

</td><td>

$\cdots \to 0 \to \left(\begin{smallmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\alpha} \left(\begin{smallmatrix} Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\beta} \left(\begin{smallmatrix} Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \to 0 \to \cdots$

</td></tr>
</table>

参考文献

[Hap] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[HW] D. Hughes, J. Waschbüsch, *Trivial extensions of tilted algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), no. 3, 641–648.

[IKM] O. Iyama, K. Kato, J. Miyachi, *Derived categories of N-complexes*, preprint arXiv:1309.6039.

[Kra] H. Krause, *Derived categories, resolutions, and Brown representability*, Interactions between homotopy theory and algebra 101–139, Contemp. Math., 436, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.