

二次元完全流体における渦度場のパターン

小川駿

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

概要

二次元トーラス上の完全流体において、安定な層流に摂動を加えると、摂動のサイズや層流を特徴付けるパラメータに依り、摂動が減衰して元の層流に戻る、複数の止まっている渦が生じる、あるいは複数の動いている渦が生じることが知られていた。本テクニカルレポートでは、線形化 Euler 方程式のダイナミクスをベースに、摂動の指数関数的な減衰と非線形トラッピングのタイムスケールを比較することで、初期状態に依ってどのような渦のパターンが生じるのかを予測する方法を紹介する。本テクニカルレポートの内容は、Julien Barré 氏 (ニース大)、森田英俊氏 (京大理)、山口義幸氏 (京大情報) との共同研究 [S. Ogawa, J. Barré, H. Morita, and Y. Y. Yamaguchi, Phys. Rev. E **89**, 063007 (2014)] に基づく。

1 導入

二次元流体における渦度場のパターンに関する研究は理論的な興味のみならず、しばしば、惑星表面の大気の大規模な流れや海流の近似モデルとして研究される [1, 2, 3]。本稿では、これらのパターン形成に関する理論的な理解を目指し、よりシンプルなトイモデルとして Euler 方程式に従う二次元トーラス $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi\Gamma)$ 上の理想流体における Cat's eye パターン [4, 5, 6] について考察する。具体的には、ベースフローは安定な層流であるとし、その速度場は $\vec{v} = (\cos(y/\Gamma), 0)$, ($\Gamma \geq 1$) であるとする。この層流に摂動を加えるとトーラスの縦横比 Γ と摂動のサイズ ϵ によって、

- 摂動がただちに減衰して層流に戻る。
- 二つの静止している渦ができる (ダイポール相)。
- 四つの動く渦ができる (振動相)。

という三通りのパターンが見られることが、既に Morita [7] によって、数値的に確認されている。先行研究 [7] では、さらに、その観察に基づき (ϵ, Γ) 平面上に相図が描かれている。本稿では、シミュレーションによらず理論的にこの相図を描くための判別式を得る方法 [8] を紹介する。

二次元の完全流体において、ある初期状態からどのような定常状態に落ち着くのか? という問題に対するアプローチとしては、既に Miller-Robert-Sommeria (MRS) による統計力学の理論がある [9, 10, 11, 12]。これは、Vlasov 方程式 (無衝突 Boltzmann 方程式) 系における Lynden-Bell 統計 [13] とよく似ている理論である。MRS 理論では、まず、相空間 \mathbb{T}^2 を小さいセルに分割し、Euler 方程式の非圧縮性を考慮しながら状態数を数え上げ、その対数を取って、連続極限をとり、エントロピー汎関数を求める。そして、そのエントロピーを無限個の (粗視化された) Casimir 不変量による拘束条件の下最大にするような密度関数を求める。ただし、一般には、以下の理由

- (一般に) 初期の渦度場は無限個の単位を持つ。
- 無限個の Casimir 不変量を考慮する必要がある。(最終的に密度関数を得るには無限個の Lagrange 未定定数を求める必要がある。)

のため、実際に MRS 理論に基づいて最終的な定常解を予測することは困難な場合がある。また、MRS 理論は定常状態を扱う理論であり、例えば、シミュレーションによる観察で見つけられている (iii) の様な動的なパターンは理論の対象外である。

似た現象は一次元プラズマ系や長距離相互作用系のトイモデルであるハミルトニアン平均場モデルにおいて、すでに発見され理論的な研究もなされている [14, 15, 16, 17]。そこで本研究では、Vlasov 方程式に基づいたこれらの先行研究をヒン

トにする。素朴な線形理論によると、安定定常解に加えられた摂動はただちに指数関数的に減衰して消えてしまう [18] (この様な減衰は Landau 減衰と呼ばれる)。これは、摂動が十分に小さい場合や、安定性が強い場合に限られたことであり、安定性が弱かったり、摂動が大きい場合には非線形効果が現れ、系の状態は元の安定定常解に戻らず、相空間上にクラスタが現れることが知られている [14, 15, 16, 17]。これを非線形トラッピングと呼ぶことにする。ハミルトン系においては以下の様な手順で、この様なクラスタが生じる場合の研究が行われていた。

- 素朴な線形化方程式から分散関係を導出し、Landau 減衰率と共鳴振動数を求める。
- Landau 減衰率の逆数として Landau 減衰の時間スケール τ_L を求める。また、共鳴振動数から動くクラスタの出来る場所が分かり、摂動のサイズ ϵ からクラスタの幅が分かる。
- クラスタの幅からテスト粒子がクラスタにトラップされている時間スケール (非線形トラッピングのタイムスケール τ_T) を求める。
- (i) $\tau_L < \tau_T$ ならば Landau 減衰の方が速やかに進み、安定定常解に戻る。
(ii) 共鳴振動数が 0 で $\tau_T < \tau_L$ ならば非線形トラッピングの効果が勝ち、止まっているクラスタができる。
(iii) 共鳴振動数が非 0 で $\tau_T < \tau_L$, かつ複数のクラスタが衝突することがなければ、共鳴振動数に対応する速度で動き回るクラスタが複数生じる。この状態は、複数の、一つのクラスタを持つ解達の非線形重ね合わせ近似で表される [19]。

これと同じことが二次元流体にも起こっていると考えられる。そこで、本テクニカルレポートでは、二次元 Euler 方程式の線形化方程式に関するレビューを行い、 τ_L と τ_T を ϵ, Γ や分散関係の根 (線形化方程式の固有値を一般化したものであり、Landau 極と呼ばれる) で表し、上記の τ_L と τ_T の大小関係に関する判別式や非線形重ね合わせ近似の条件を求める。最後にそれらを解いて (ϵ, Γ) 平面上に相図を描く。

2 線形化 Euler 方程式と分散関係

本研究では、トーラス $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ 上における渦度場 ω の従う 2D Euler 方程式,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (1)$$

を出発点とする。ただし、 \vec{v} は速度場である。速度場 \vec{v} と渦度場 ω は、流れ関数 ψ を用いて次の様に表すこともできる:

$$\omega = \nabla^2 \psi, \quad \vec{v} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (2)$$

まずは、Euler 方程式 (1) をベースフローの周りで線形化する。文献 [23] に倣い、線形化 Euler 方程式に、 x について Fourier 級数展開、時間 t について Laplace 変換を施し、流れ関数の摂動が従う Rayleigh 方程式を導出する。そして、そこから分散関係を導出する。分散関係は Laplace 変換を用いて導出されており、この時点では上半平面か下半平面のどちらか一方でしか定義されていない。そこで、Landau 減衰に対応する根を見つけるためには、分散関係の定義域を拡大する必要がある。本稿では、円盤上の二次元 Euler 方程式においてなされていた方法 [20, 21, 22] を、トーラス上のフローにも適用できるように拡張することで、分散関係の定義域を拡大する方法を紹介する。

2.1 分散関係の導出

Euler 方程式 (1) を流れ関数 $\psi_0(y)$ で表されるベースフロー周りで展開する。このベースフローに対応する速度場を $\vec{v}_0 = (U(y), 0)$ とすると、渦度場は $\omega_0(y) = -U'(y)$ である。このベースフローに以下の様に摂動を加える:

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(y) + \psi_1(x, y, t), \quad \psi_1(x, y, t=0) = \epsilon \cos x. \quad (3)$$

流れ関数の摂動部分 ψ_1 に対応する渦度場と速度場を各々 ω_1, \vec{v}_1 とする。これらを用いて線形化 Euler 方程式を書く:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - U''(y) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

渦度場 ω_1 と流れ関数 ψ_1 を x について Fourier 級数展開する:

$$\omega_1(x, y, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\omega}_k(y, t) e^{ikx}, \quad \psi_1(x, y, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}_k(y, t) e^{ikx}. \quad (5)$$

これらを線形化 Euler 方程式に代入すると, 各 Fourier モード毎の方程式

$$\frac{\partial \hat{\omega}_k}{\partial t} + ikU(y)\hat{\omega}_k - ik\hat{\psi}_k U''(y) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

を得る. 次に関数 $\hat{g}(t)$ の Laplace 変換を $\tilde{g}(z) = \int_0^\infty \hat{g}(t) e^{-zt} dt$, ($\text{Re}z > 0$) で定義する. 条件 $\text{Re}z > 0$ は積分を収束させるための制限である. 各モード毎の線形化 Euler 方程式に Laplace 変換を施すと次の式を得る:

$$(U(y) - c)\tilde{\omega}_k - U''(y)\tilde{\psi}_k = \frac{\hat{\omega}_k(y, 0)}{ik}. \quad (7)$$

ただし, $z = -ikc$, ($\text{Im}(kc) > 0$) である. 渦度場と流れ関数の関係 (2) と式 (7) より, Rayleigh 方程式

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}_k}{dy^2} - q(y)\tilde{\psi}_k = f(y), \quad q(y) = k^2 + \frac{U''(y)}{U(y) - c}, \quad f(y) = \frac{\hat{\omega}_k(y, 0)}{ik(U(y) - c)} \quad (8)$$

を得る. これに対応する同次 Rayleigh 方程式は

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} - q(y)\phi = 0 \quad (9)$$

である. ここから Rayleigh 方程式 (8) の一般解を求め, 分散関係を導出する. まず, ϕ_1, ϕ_2 を各々, 同次方程式 (9) の境界条件 $\phi_1(0) = 1, \phi_1'(0) = 0$, と $\phi_2(0) = 0, \phi_2'(0) = 1$ に対応する解であるとする. すると非同次方程式 (8) の特解

$$\phi_p(y) = -\phi_1(y) \int_0^y \phi_2(y') f(y') dy' + \phi_2(y) \int_0^y \phi_1(y') f(y') dy' \quad (10)$$

を得る. よって, 非同次方程式 (8) の一般解は

$$\phi_g(y) = \phi_p + a_1 \phi_1(y) + a_2 \phi_2(y) \quad (11)$$

で表されるので, a_1, a_2 を周期境界条件 $\phi_g(2\pi\Gamma) = \phi_g(0)$ を満たすように決める. つまり次の一次方程式を解けばよい:

$$\begin{pmatrix} \phi_1(2\pi\Gamma) - 1 & \phi_2(2\pi\Gamma) \\ \phi_1'(2\pi\Gamma) & \phi_2'(2\pi\Gamma) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_p(2\pi\Gamma) \\ \phi_p'(2\pi\Gamma) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

ここで, ϕ_1, ϕ_2 は方程式 (9) の $q(y)$ で決まるので, 実は c に依存していることを思い出すと, この方程式の左辺の行列の行列式は c の関数であるので $D(c)$ で表す. Wronskian, $\phi_1\phi_2' - \phi_1'\phi_2$ が 1 であることを用いると,

$$D(c) = 2 - \phi_1(2\pi\Gamma) - \phi_2'(2\pi\Gamma) \quad (13)$$

である. 一般解 ϕ_g は $D(c) = 0$ なる c において極を持ち, この極は逆 Laplace 変換を行う際に, e^{-ikct} に比例する非自明なモードの素 (留数) として拾われる. $D(c)$ は分散関数, $D(c) = 0$ は分散関係と呼ばれる.

2.2 分散関係の定義域の拡大

ここから $k=1$ とし, $U(y) = \cos(y/\Gamma)$ とする. 分散関数 $D(c)$ は Laplace 変換を用いて得られたので, 現時点では, その定義域は $\{c \in \mathbb{C} | \text{Im}(c) > 0\}$ である. 指数関数的な減衰に対応する根を得るため, $D(c)$ を解析接続し, 定義域を下半平面へ拡大する. 解析接続は, 二次元円盤上の流体でなされた先行研究における方法をトーラス上で使えるように若干の修正をすることで行う.

c が上半平面にある場合, 分散関数 $D(c)$ の値は同次方程式 (9) を $L = \{y \in \mathbb{R} | y = y(s) = 2\pi\Gamma s : s \in [0, 1]\}$ 上で積分することで得られる. ここで, c を連続的に上半平面から下半平面へ動かすと $(-1, 1)$ を横切る際に, $U(y) = c$ を満たす y が存在してしまい, 同次方程式 (9) を積分することができなくなってしまう. そこで, 積分経路 L を

$$L_h = \{y \in \mathbb{R} | y = y_h(s) = 2\pi\Gamma(s + ih(s)) : s \in [0, 1]\}, \quad h: \mathbb{C}^2, \text{ real valued, and 1 periodic}, \quad (14)$$

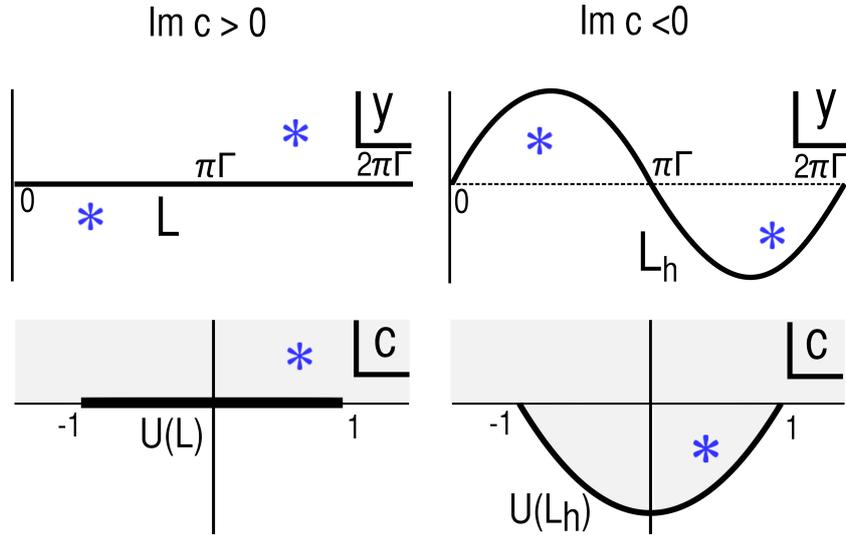


図1 $k=1$ の場合に, c (図中では $*$) を上半平面から下半平面へと連続的に動かした場合に L_h ほどの様に c を避け, $D(c)$ の定義域 (灰色部) はどの様に拡大されるのかを表した. ここで用いられている方法は, 本質的には, 線形化 Vlasov 方程式の分散関係の解析接続における Landau の方法 [18] と同じ方法である.

に変形することで, $U(y) = c$ になることを回避し, $\{c \in \mathbb{C} | \text{Im} c \leq 0\}$ へ解析接続をする (図 1).

ここで $s \in [0, 1]$ の関数 $\varphi(s) = \phi(y_h(s))$ と $p(s) = q(y_h(s))$ を導入し, 同次 Rayleigh 方程式 (9) に代入する. 添え字 R と I は 各々実部と虚部を表す.

$$\begin{aligned} \varphi''_R - \frac{h'h''}{1+h'^2}\varphi'_R + \frac{h''}{1+h'^2}\varphi'_I - (2\pi\Gamma)^2((1-h'^2)p_R - 2h'p_I)\varphi_R + (2\pi\Gamma)^2(2h'p_R + (1-h'^2)p_I)\varphi_I &= 0, \\ \varphi''_I - \frac{h''}{1+h'^2}\varphi'_R - \frac{h'h''}{1+h'^2}\varphi'_I - (2\pi\Gamma)^2(2h'p_R + (1-h'^2)p_I)\varphi_R - (2\pi\Gamma)^2((1-h'^2)p_R - 2h'p_I)\varphi_I &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

先ほど用いた φ_1, φ_2 にあたる $\varphi_1(s), \varphi_2(s)$ は, 各々, 次の境界条件を満たす:

$$\begin{cases} \varphi_{1,R}(0) = 1, \\ \varphi_{1,I}(0) = 0, \\ \varphi'_{1,R}(0) = 0, \\ \varphi'_{1,I}(0) = 0, \end{cases} \text{ and } \begin{cases} \varphi_{2,R}(0) = 0, \\ \varphi_{2,I}(0) = 0, \\ \varphi'_{2,R}(0) = 2\pi\Gamma, \\ \varphi'_{2,I}(0) = 2\pi\Gamma h'(0). \end{cases} \quad (16)$$

これらを用いると, 解析接続された分散関数

$$D(c) = 2 - \varphi_1(1) - \frac{\varphi'_2(1)}{2\pi\Gamma(1 + ih'(1))} \quad (17)$$

を得る. ある $c = c_R + ic_I$ が分散関係の根ならば $-\bar{c} = -c_R + ic_I$ も分散関係の根である.

3 ダイポール相と振動相になるための条件

3.1 減衰の時間スケール vs トラッピング時間スケール

Landau 減衰の時間スケールは減衰率 $|c_I|$ の逆数, つまり $\tau_L = 1/|c_I|$ である. さらに長時間待つと, 指数関数的 Landau 減衰ではなく, ベキ的 Landau 減衰の効果が現れるが [23, 24], 今回着目するスケールでは指数関数的 Landau 減衰の方が支配的である.

次に非線形トラッピングのタイムスケール τ_T を求める. これは, 試験点渦が渦の端を一周する時間スケールとして求められる. そこで, 渦の中心近傍の試験点渦の運動に着目する.

まず, 試験点渦の従う運動方程式は

$$\dot{x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = U(y) - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi_1}{\partial x}. \quad (18)$$

(流れ関数が有効ハミルトニアン, x が y の共役運動量のハミルトン系と見なせる.) 我々はマクロな挙動に興味があるので, 摂動 ψ_1 の第一 Fourier モードだけに着目するという近似を行う:

$$\psi_1(x, y, t) \simeq \epsilon \hat{\psi}_1(y) \cos(x - c_R t), \quad \hat{\psi}_1(y) = O(\epsilon^0). \quad (19)$$

これを試験点渦の運動方程式 (18) に代入すると,

$$\dot{x} = U(y) - \epsilon \hat{\psi}'_1(y) \cos(x - c_R t), \quad \dot{y} = -\epsilon \hat{\psi}_1(y) \sin(x - c_R t) \quad (20)$$

を得る. あとは, これを ϵ について逐次的に解く. まず, x, y を次の様に表しておく:

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2), \quad y(t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + O(\epsilon^2). \quad (21)$$

$O(\epsilon^0)$ について, 初期値 $x_0(0) = X, y_0(0) = Y$ とすると

$$x_0(t) = X + U(Y)t, \quad y_0(t) = Y \quad (22)$$

を得る. 特に, 渦の中心の y 座標に対応する Y を $Y^* = U^{-1}(c_R)$ で表す.

$O(\epsilon^1)$ について, $x_1(t), y_1(t)$ は以下の方程式に従う:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= U'(Y)y_1(t) - \hat{\psi}'_1(Y) \cos(X + (U(Y) - c_R)t), \\ \dot{y}_1(t) &= -\hat{\psi}_1(Y) \sin(X + (U(Y) - c_R)t). \end{aligned} \quad (23)$$

ここで, y_1 の振動の周期を知りたいので, $y(t)$ の初期値 Y を $Y^* + g(\epsilon, \Gamma)$ とし $(x_1(t=0), y_1(t=0)) = (0, 0)$ とする. ただし, $g(\epsilon, \Gamma)$ は摂動のサイズ ϵ とトラスの縦横比 Γ の場合に生じる渦の幅であるとする. この g は後に自己無撞着に定められる. 時間スケール τ_T は, $y_1(t)$ の振動の周期と等しい時間スケールであり, 次の様に求められる:

$$\tau_T \simeq \frac{1}{|U(Y^* + g(\epsilon, \Gamma)) - c_R|} \simeq \frac{1}{g(\epsilon, \Gamma)|U'(Y^*)|}. \quad (24)$$

次に, $g(\epsilon, \Gamma)$ を求める. まず, 式 (23) の解 $y_1(t)$ は,

$$y_1(t) = -\frac{\hat{\psi}_1(Y^* + g(\epsilon, \Gamma))}{U(Y^* + g(\epsilon, \Gamma)) - c_R} \sin([U(Y^* + g(\epsilon, \Gamma)) - c_R]t), \quad (25)$$

ただし, $X = \pi/2$ とした. この $y_1(t)$ の振幅は渦の幅 $g(\epsilon, \Gamma)$ と等しい. そこで, 渦の端にあたる点で $\hat{\psi}_1(y) = 1$ になっているとすると,

$$g(\epsilon, \Gamma) = \frac{\epsilon}{U(Y^* + g) - c_R} \Rightarrow g(\epsilon, \Gamma) \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{|U'(Y^*)|}}. \quad (26)$$

今, $U(y) = \cos(y/\Gamma)$ であるから, $|U'(Y^*)| = \Gamma^{-1} \sqrt{1 - c_R^2}$ である. これと式 (26) を式 (24) に代入することで, τ_T は具体的に次の様に表される:

$$\tau_T = \sqrt{\frac{\Gamma}{\epsilon}} (1 - c_R^2)^{-1/4}. \quad (27)$$

従って, トラッピングが Landau 減衰に比べ支配的になる条件 $\tau_T < \tau_L$ は

$$\frac{\Gamma c_1^2}{\sqrt{1 - c_R^2}} < \epsilon \quad (28)$$

である.

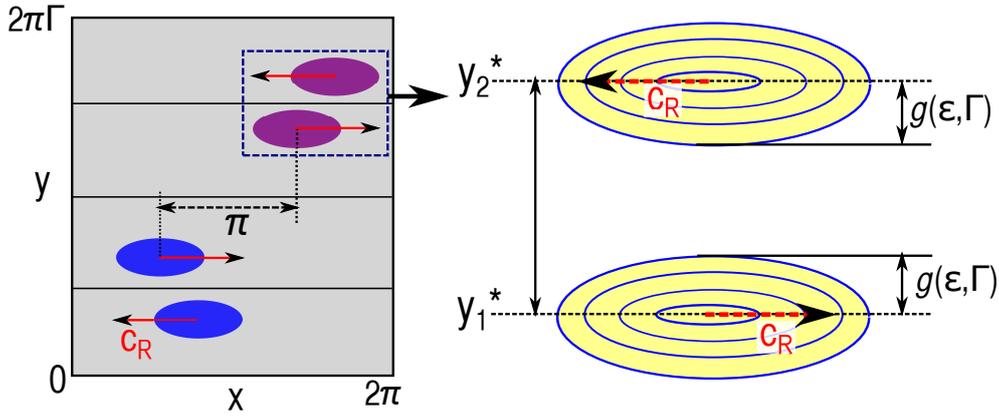


図2 振動相の模式図: (左) 同色の渦は渦度の符号の等しい渦を表す. これらはベースフローに乗って移動している. (右) 左図の一部を拡大した図. 不等式 $|Y_2^* - Y_1^*| > 2g$ がこの二つの渦が重ならない条件であり, これは不等式 (30) の上の方と等価である.

3.2 動く渦が重ならない条件

ダイポール相においては, $c_R = 0$, つまり, $Y^* = \pi\Gamma/2, 3\pi\Gamma/2$ なので, 2つの渦は少なくとも $\pi\Gamma$ ($\Gamma \geq 1$) だけ離れている. 今回扱われる摂動のサイズは $\epsilon < 0.5$ の範囲なので, ダイポール相においては渦の重なりについては心配する必要はない.

一方, 振動相 ($c_R \neq 0$) では, 図2に示すように, $+X$ 方向へ動く二つの渦と $-X$ 方向へ動く二つの渦の計四つの渦が生じる. この場合, 動く渦同士が接触することがあるので, その様なことが起きない条件を求める必要がある. 分散関係の一つの根の実部 c_R は $0 < \arcsin(c_R) < \pi/2$ を満たしているとする. この時, $-c_R + ic_I$ も根になっているので, 動いている渦が生じるのは,

$$Y^* = \Gamma \arccos(c_R), \pi\Gamma - \Gamma \arccos(c_R), \pi\Gamma + \Gamma \arccos(c_R), 2\pi\Gamma - \Gamma \arccos(c_R), \quad (29)$$

の四箇所になる. ここで, どの渦も同じ幅 g であるとする. 二つの隣接する渦がぶつからない条件はそれらの y 方向の隔たりが $2g$ より大きければ良いので,

$$\begin{cases} \Gamma \arcsin(c_R) > g, & |c_R| < 1/\sqrt{2}, \\ \Gamma \arccos(c_R) > g, & |c_R| > 1/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (30)$$

ところで, 数値的な観察によると, 同じ速度で動く二つの渦の間の x 方向の隔たりは π なので, 実際に重要な条件は, 互いに違いに動く渦同士がぶつからない条件を表す $\Gamma \arcsin(c_R) > g$ である. つまり, 振動相では不等式 (28) に加え,

$$\epsilon < \Gamma \sqrt{1 - c_R^2 (\arcsin(c_R))^2} \quad (31)$$

が満たされている必要がある.

摂動が加わった初期状態からどの状態へ行くのかについてまとめた:

層流 $\Leftrightarrow \tau_L < \tau_T$,

ダイポール相 $\Leftrightarrow \tau_L > \tau_T, c_R = 0$,

振動相 $\Leftrightarrow \tau_L > \tau_T, c_R \neq 0, \epsilon < \Gamma \sqrt{1 - c_R^2 (\arcsin(c_R))^2}$,

不明 $\Leftrightarrow \tau_L > \tau_T, c_R \neq 0, \epsilon > \Gamma \sqrt{1 - c_R^2 (\arcsin(c_R))^2}$.

これらの不等式を解いて, 相図を描くと図3を得る. これは Morita [7] によるシミュレーション結果より得られた相図と質的には同等である.

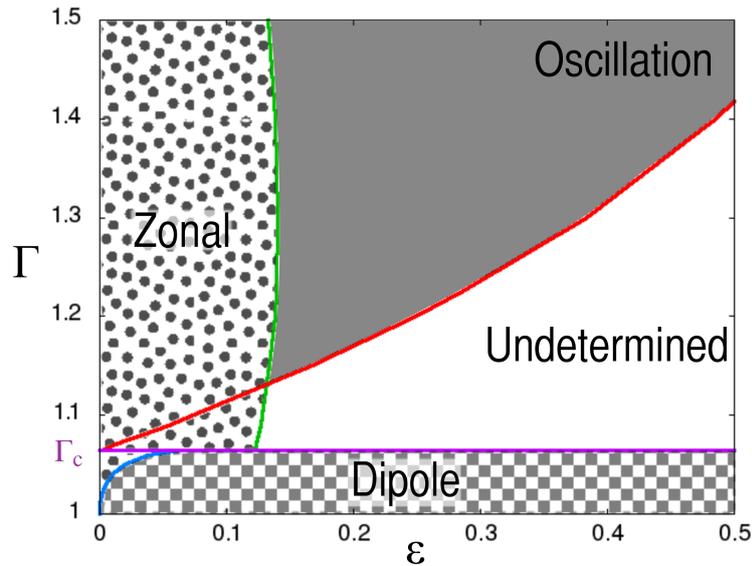


図3 相図: マダラ模様の領域は Landau 減衰がトラッピング効果より強く, 元の層流に減衰する領域である. $\Gamma < \Gamma_c$ ならば分散関係の根の実部 $c_R = 0$ であり, $\Gamma > \Gamma_c$ ならば分散関係の根の実部 $c_R \neq 0$ である. チェックの領域はダイポール相である. グレーの領域は振動相である. 白い領域は本理論の適用範囲外, つまり不明な領域である. 振動相と不明な領域との境界線は判別式 (31) で得られ, 振動相と層流の境界は $\tau_L = \tau_T$ で得られる. また, ダイポール相と層流の境界も $\tau_L = \tau_T$ で得られる.

4 まとめ

まず, \mathbb{T}^2 上の線形化 Euler 方程式より分散関係を文献 [23] に倣って導出し, その定義域を円板上でなされていた方法 [22] を改良することで下半平面に広げ, Landau 減衰の元になる分散関係の根 (Landau 極や埋没固有値) を求める方法を紹介した. 本研究で用いたベースフロー $U(y) = \cos(y/\Gamma)$ は $\Gamma < 1$ で不安定, $\Gamma = 1$ で中立安定になり, $\Gamma > 1$ で安定になることが知られている [23]. 分散関係の根を求めてみると, $\Gamma < 0$ では分散関係 $D(c) = 0$ の根の虚部 c_I は正であり, 確かに不安定である. また, $\Gamma = 1$ では分散関係の根 $c = 0$ である. $1 < \Gamma < \Gamma_c$ では分散関係の根は $c_R = 0, c_I < 0$ を満たし, ベースフローはスペクトル安定であることも分かる [8]. さらに, $\Gamma > \Gamma_c$ では分散関係の根は $c_R \neq 0, c_I < 0$ を満たし, ベースフローはスペクトル安定であり, 動く渦が生じうる [8].

こうして求められた分散関係の根を用いて, 与えられた初期状態に対し,

1. Landau 減衰と非線形トラッピング効果のどちらが支配的なのか
2. 線形化 Euler 方程式から導出した分散関係 $D(c) = 0$ の根の実部 c_R は 0 か.
3. $c_R \neq 0$ の場合, その振動数に対応する速度で移動する複数の渦は衝突しないか.

を調べることで, しばらく経った後に観測される相は次の様に予測された:

- 1. Landau 減衰 \Rightarrow 層流
- 1. 非線形トラッピング, 2. $c_R = 0 \Rightarrow$ ダイポール相
- 1. 非線形トラッピング, 2. $c_R \neq 0$, 3. 衝突しない \Rightarrow 振動相

複数の渦が衝突してしまう場合は, 線形化 Euler 方程式を基にした理論では扱えない領域である. こうして得られた相図は質的には既に数値的な観察より得られていた相図 [7] と同等である. 従って, 二次元流体の渦度場におけるパターン形成も, プラズマ系やハミルトニアン平均場モデルにおけるクラスタ形成と同様, 非線形トラッピングと線形 Landau 減衰の関係で説明されることが分かった.

最後に, 実際の流体との対応について述べる. 本研究では粘性が無い理想流体を用いた. 粘性 ν が非 0 である場合, 渦度場の従う方程式においては, 粘性 ν に関する項が最高次数の項である. 従って, $\nu \rightarrow 0$ で得られる結果と初めから $\nu = 0$ として得られた結果は異なることがあり, ν が十分小さいとしても, 粘性が本結果にどのような影響を与えるのかはまだ分かっていない.

謝辞

本テクニカルレポートは Julien Barré 氏 (ニース大), 森田英俊氏 (京大理), 山口義幸氏 (京大情報) との共同研究 [8] に基づいている. 著者は日本学術振興会特別研究員奨励費 (No. 254728) による助成を受けている.

参考文献

- [1] F. Bouchet and A. Venaille, *Phys. Rep.* **515**, 227 (2012).
- [2] P. S. Marcus, *Nature*, **331**, 693 (1988).
- [3] B. Marston, *Physics* **4**, 20 (2011).
- [4] W. Thomson, *Nature* **23**, 45 (1880).
- [5] H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 1932).
- [6] J. T. Stuart, *J. Fluid Mech.* **29**, 417 (1967).
- [7] H. Morita, arXiv:1103.1140.
- [8] S. Ogaw, J. Barré, H. Morita, and Y. Y. Yamaguchi, *Phys. Rev. E* **89**, 063007 (2014)
- [9] J. Miller, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2137 (1990).
- [10] J. Miller, P. B. Weichman, and M. C. Cross, *Phys. Rev. A* **45**, 2328 (1992).
- [11] R. Robert, *J. Stat. Phys.* **65**, 531 (1991).
- [12] R. Robert and J. Sommeria, *J. Fluids. Mech.* **229**, 291 (2002).
- [13] D. Lynden-Bell, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **136**, 101 (1967).
- [14] T. M. O'Neil, *Phys. Fluids* **8**, 2255 (1965).
- [15] J. P. Holloway, J. J. Dorning, *Phys. Rev. A* **44** 3856 (1991).
- [16] C. Lancellotti and J. J. Dorning, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5236 (1998); *Phys. Rev. E* **68**, 026406 (2003); *Trans. Th. Stat. Phys.* **38**, 1 (2009).
- [17] J. Barré and Y. Y. Yamaguchi, *Phys. Rev. E* **79**, 036208 (2009).
- [18] L. D. Landau, *J. Phys. U.S.S.R.* **10**, 25 (1946); *Collected papers of L. D. Landau* edited by D. T. Haar (Pergamon Press, Oxford, 1965).
- [19] M. Buchanan and J. J. Dorning, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3732 (1993); *Phys. Rev. E* **52** 3015 (1996).
- [20] R. J. Briggs, J. D. Daugherty, and R. H. Levy, *Phys. Fluids* **13**, 421 (1970).
- [21] N. R. Corngold, *Phys. Plasmas* **2**, 620 (1995).
- [22] R. L. Spencer and S. N. Rasband, *Phys. Plasmas* **4**, 53 (1997).
- [23] F. Bouchet and H. Morita, *Physica D* **239**, 948 (2010).
- [24] J. Barré, A. Olivetti, and Y. Y. Yamaguchi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **44**, 405502 (2011).