3次元Lorentz空間内の空間的な離散平均曲率一定曲面の構成について*

緒方　勇太

1 Introduction

「平均曲率一定曲面 (CMC 曲面)」はシャボン玉の数学的モデルであり、CMC 曲面の構成方法の研究は古くから行われてきた。1866 年に、K. T. Weierstrass により $\mathbb{R}^3$ 内の平均曲率一定零曲面（極小曲面）に対して、積分型の公式（「Weierstrass の表現公式」）が与えられた。また、$\mathbb{R}^3$ 内の平均曲率がゼロでない一定曲面に関しては、J. Dorfmeister 氏と F. Pedit 氏、H. Wu 氏によって、行列分解などを用いた構成理論が考案された。([3]) この構成法は「DPW 法」と呼ばれ、近年では $\mathbb{R}^3$ だけではなく、さまざまなリーマン空間形やセミ・リーマン空間形内の CMC 曲面の構成のために応用されている。

一方、可積分系理論に立脚した曲面の離散化は、A. I. Bobenko 氏と U. Pinkall 氏 ([1],[2]) の研究を契機に急速な発展を遂げている。[1],[2] では双等温曲面と呼ばれる、共形かつ曲率線座標を持つ曲面の離散化が行われた。なめらかな場合、双等温曲面の特別なクラスとして CMC 曲面が含まれており、非常に豊かな研究対象として古くから研究が盛んに行われてきた。双等温曲面は、無限小の正方形の貼り合わせとして解釈することができ、このことに注目し、[1],[2] では、$\mathbb{R}^3$ 内の双等温曲面の特徴付けを「複比」を用いて行い、その性質をもとに双等温曲面の離散化を行った。また、[1],[2] では、「双対曲面」というものを定義し、離散極小曲面を構成した。その後、T. Hoffmann 氏は $\mathbb{R}^3$ 内の離散平均曲率一定曲面の構成理論として「離散 DPW 法」を考案し、いくつかの離散 CMC 曲面の例を構成した。([4],[5]) 本講演では、この離散 DPW 法が 3 次元 Lorentz 空間と呼ばれる、正定値とは限らない計量を持つ空間内でも応用できることを報告する。([6])

2 Notations

はじめに、3 次元 Lorentz 空間 $\mathbb{R}^{2,1}$ を以下の Lorentz 計量をもつ 3 次元空間として定義する：

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 - x_0y_0 \quad \text{for} \quad x = (x_1, x_2, x_0), y = (y_1, y_2, y_0) \in \mathbb{R}^{2,1}.$$

このとき、$\mathbb{R}^{2,1}$ は以下のように行列群と同一視される：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2,1} & \longrightarrow & su_{1,1} \\ \cup & & \cup \\ x = (x_1, x_2, x_0) & \longmapsto & \begin{pmatrix} ix_0 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -ix_0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

ここからは離散微分幾何に関わるいくつかの定義を紹介する。「空間的な CMC 曲面」も含むより広い曲面のクラスとして、空間的な双等温曲面がある。ここでは、空間的な双等温曲面の離散化のために、行列に対する「複比」を定義する。

*この研究は、安本真士氏 (神戸大学) との共同研究 ([6]) によるものである。

Definition 2.1 ([7])**.** $X_1,\ X_2,\ X_3, X_4$ を $su_{1,1} \approx \mathbb{R}^{2,1}$ 内の *4* 点とする。 そのとき、

$$\mathrm{cr}(X_1, X_2, X_3, X_4) := (X_1 - X_2)(X_2 - X_3)^{-1}(X_3 - X_4)(X_4 - X_1)^{-1}$$

を $X_1,\ X_2,\ X_3, X_4$ に対する複比と呼ぶ。

この複比を使って、ここでは「空間的な双等温曲面」の離散化を以下で与える：

Definition 2.2 ([7])**.** $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ が

$$\mathrm{cr}(f_{m,n}, f_{m+1,n}, f_{m+1,n+1}, f_{m,n+1}) = -\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} I \quad \text{for all } (m,n) \in \mathbb{Z}^2$$

をみたすとき、f を空間的な離散双等温曲面と呼ぶ。ただし、$\alpha_m,\ \beta_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ を m または n のみに依存する関数とする。

また、主定理 Theorem 4.1 で必要になる「離散正則関数」も複比を用いて定義される。

Definition 2.3 ([4], [5], [7])**.** $\mathcal{Z} : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ が

$$\mathrm{cr}(\mathcal{Z}_{m,n}, \mathcal{Z}_{m+1,n}, \mathcal{Z}_{m+1,n+1}, \mathcal{Z}_{m,n+1}) = -\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} \quad \text{for all } (m,n) \in \mathbb{Z}^2$$

をみたすとき、$\mathcal{Z}$ を離散正則関数と呼ぶ。ただし、$\alpha_m,\ \beta_n$ は *Definition 2.2* と同様。

そして、「双対曲面」を定義することで「空間的な離散 CMC($H \neq 0$) 曲面」を定義する。

Definition 2.4 ([7])**.** $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ を空間的な離散双等温曲面とする。そのとき、 f の双対曲面 f^* を、以下の差分方程式を満たすものとして定義する：

$$f^*_{m+1,n} - f^*_{m,n} = \frac{1}{\alpha_m^2} \frac{f_{m+1,n} - f_{m,n}}{\langle f_{m+1,n} - f_{m,n}, f_{m+1,n} - f_{m,n}\rangle}, \quad f^*_{m,n+1} - f^*_{m,n} = -\frac{1}{\beta_m^2} \frac{f_{m,n+1} - f_{m,n}}{\langle f_{m,n+1} - f_{m,n}, f_{m,n+1} - f_{m,n}\rangle}.$$

Definition 2.5 ([7])**.** 空間的な離散双等温曲面 $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ の双対曲面 f^* が以下を満たすとき：

$$\langle f_{m,n} - f^*_{m,n}, f_{m,n} - f^*_{m,n}\rangle = -\frac{1}{H^2}$$

f を空間的な離散 *CMC*($H \neq 0$) 曲面とよぶ。

3 Result 1(離散的な場合の行列分解)

DPW 法において、一つの重要な役割を果たすのが「Birkhoff 分解」と「Iwasawa 分解」と呼ばれる 2 つの行列分解である。なめらかな場合、これらの分解は「ループ群」というリー群に対して行われるのだが、離散の場合は異なり、「射影的ループ群」という行列群を用いる。まず、ループ群 $\Lambda\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の射影的ループ群 $\mathrm{P}\Lambda\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ を紹介する。([4],[5])

Definition 3.1 ([4],[5])**.** $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ と $\lambda_1 \in i\mathbb{R}\backslash\{\pm i\}$ に対し、*2* 次行列の集合 $\mathrm{P}\Lambda\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ を以下の条件で定義する： $C(\lambda) \in \mathrm{P}\Lambda\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ であるとは、

1. $C(\lambda)$ は λ に関するローラン多項式*.*

2. $C(\lambda)$ は *twisted* である*:* $C(-\lambda) = \sigma_3 C(\lambda)\sigma_3$*.*

3. $\det(C(\lambda)) = (1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2})^i (1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2})^j (1 - \lambda_0^2\lambda^2)^k (1 - \lambda_1^2\lambda^2)^l$ *for some* $i, j, k, l \in \mathbb{N}$*.*

ただし、$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

ここで、$\mathrm{P\Lambda SL}_2(\mathbb{C})$ に対する「離散 Birkhoff 分解」を紹介する。

Proposition 3.1 ([4], [5])**.** $C \in \mathrm{P\Lambda SL}_2(\mathbb{C})$ とする。そのとき、以下の条件をみたす行列 X, $\tilde{C} \in \mathrm{P\Lambda SL}_2(\mathbb{C})$ が存在する：

$$C = X\tilde{C}, \quad X(\lambda) \overset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} I, \quad \det(\tilde{C}(\lambda)) = \frac{\det(C(\lambda))}{1 - \frac{\lambda_l^2}{\lambda^2}}.$$

ただし、$l = 0$ or 1.

さらに、主定理 Theorem 4.1 でも必要になり、今回新たに構成した行列分解を紹介する。

Theorem 3.1.

$$L^{-}_{l,m,n}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{p_{l,m,n}}{\lambda} \\ \frac{\lambda_l^2}{p_{l,m,n}\lambda} & 1 \end{pmatrix} \quad (l = 0, 1)$$

とする。そのとき、以下を満たす行列 $L_{l,m,n}(\lambda)$ が符号の違いを除いてただ一つ存在する：

1. $L_{l,m,n}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{l,m,n} & \lambda b_{l,m,n} - \frac{1}{\lambda b_{l,m,n}} \\ \frac{\bar{b}_{l,m,n}}{\lambda} - \frac{\lambda}{\bar{b}_{l,m,n}} & \bar{a}_{l,m,n} \end{pmatrix}$
2. $\left(L^{-}_{l,m,n}(\lambda_l)\right)^{-1} \cdot L_{l,m,n}(\lambda_l) = \mathbf{0}$
3. $\det(L_{l,m,n}(\lambda)) = \frac{\pm 1}{|\lambda_l|^2}\left(1 - \frac{\lambda_l^2}{\lambda^2}\right)\left(1 - \lambda_l^2\lambda^2\right)$

4 Result 2($\mathbb{R}^{2,1}$ 内の空間的な離散 CMC($H \neq 0$) 曲面の構成法)

ここでは、$\mathbb{R}^{2,1}$ 内の空間的な離散 CMC($H \neq 0$) 曲面に対する「離散 DPW 法」について結果のみを述べる。詳細は、講演当日に説明する。(詳しくは [6])

Theorem 4.1. 空間的な離散 *CMC*($H \neq 0$) 曲面 $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ は以下の *Steps 1∼4* で構成される*:*

Step 1: $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ と $\lambda_1 \in i\mathbb{R}\backslash\{\pm i\}$ を一つずつ選ぶ。$\mathcal{Z} : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ を離散正則関数とし、$\mathrm{cr}(\mathcal{Z}_{m,n}, \mathcal{Z}_{m+1,n}, \mathcal{Z}_{m+1,n+1}, \mathcal{Z}_{m,n+1}) = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2}$ とする。さらに、$L^{-}_{m,n}$ と $M^{-}_{m,n}$ を以下で定義する：

$$L^{-}_{m,n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{p_{m,n}}{\lambda} \\ \frac{\lambda_0^2}{\lambda p_{m,n}} & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-}_{m,n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{q_{m,n}}{\lambda} \\ \frac{\lambda_1^2}{\lambda q_{m,n}} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

for $p_{m,n} := \mathcal{Z}_{m+1,n} - \mathcal{Z}_{m,n}$ *and* $q_{m,n} := \mathcal{Z}_{m,n+1} - \mathcal{Z}_{m,n}$.

Step 2: 次の差分方程式を解く：

$$\begin{cases} \phi_{m+1,n} = \phi_{m,n} L^{-}_{m,n} \\ \phi_{m,n+1} = \phi_{m,n} M^{-}_{m,n} \end{cases} \tag{4.2}$$

ただし、初期条件は $\phi_{0,0} = I$.

<u>*Step 3:*</u> *Result 1* の２つの行列分解を施して、$\phi_{m,n}$ を分解する：

$$\phi_{m,n} = F_{m,n} B_{m,n} \tag{4.3}$$

<u>*Step 4:*</u> $F_{m,n}$ を以下の *Sym-Bobenko* 型の公式に代入すると、曲面 $f_{m,n}$ が得られる：

$$f_{m,n} = \mathrm{Sym}(F_{m,n}) = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{2} F_{m,n} i\sigma_3 F_{m,n}^{-1} + i\lambda(\partial_\lambda F_{m,n}) F_{m,n}^{-1}\right]\Bigg|_{\lambda=1}, \tag{4.4}$$

where

$$\mathrm{Im} : \begin{pmatrix} a+ib & c-id \\ c+id & a-ib \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ib & c-id \\ c+id & -ib \end{pmatrix}.$$

5 Examples

ここでは、離散 DPW 法を用いて構成した空間的な離散 CMC 曲面の新しい例を一つ紹介する。講演当日は、より多くのグラフィックスをお見せしたい。

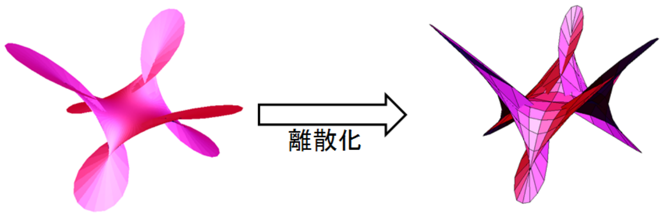

Fig. 1: Smyth 曲面と呼ばれる曲面の離散化

Bibliography

[1] A. I. Bobenko and U. Pinkall, *Discrete isothermic surfaces*, J. Reine Angew. Math., 475 (1996), 187-208.

[2] A. I. Bobenko and U. Pinkall, *Discretization of surfaces and integrable systems*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 16. Oxford. Univ. Press (1998). 3-58.

[3] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. **6(4)** (1998), 633-668.

[4] T. Hoffmann, *Discrete cmc surfaces and discrete holomorphic maps*, Discrete integrable geometry and physics (Vienna, 1996) , 83-96, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 16, Oxford Univ. Press, New York, 1999.

[5] T. Hoffmann, *Discrete curves and surfaces*, doctoral thesis, TU Berlin (2000).

[6] Y. Ogata and M. Yasumoto, *The DPW method for constant mean curvature surfaces with singularities in Minkowski space*, in preparation.

[7] M. Yasumoto, *Discrete maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, submitted.