An explicit formula for the specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = \infty$

野本 文彦

概要

このテクニカルレポートは, 以下の様な構成である. 第 1, 2 節では, 他分野の研究者向けに, 講演で用いるルート系と Weyl 群についての説明し, 非対称 Macdonald 多項式の定義を述べる. 第 3 節では, 講演のテーマである非対称 Macdonald 多項式の $t = \infty$ での特殊化の表現論的意味を解説する.

1　ルート系と Weyl 群

ここではベクトル空間から抽象的に定義されるルート系と Weyl 群について説明する. Lie 環との関係については, [K] などを参照されたい.

1.1　ルート系

V を n 次元実ベクトル空間として, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ を V 上の内積とする. $\alpha \in V \setminus \{0\}$ に対して, $\alpha^\vee \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ とする. s_α を, α についての鏡映とする: $s_\alpha(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$ $(x \in V)$. このとき, 次を満たす V の有限部分集合 Δ をルート系と呼び, Δ の元をルートと呼ぶ:

(1) Δ は V を生成する.

(2) $\alpha, \beta \in \Delta$ について, $s_\alpha(\beta) \in \Delta$ が成り立つ.

(3) $\alpha, \beta \in \Delta$ について, $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ は整数である.

(4) $\alpha \in \Delta$, $c \in \mathbb{R}$ について, $c\alpha \in \Delta$ となるのは $c = \pm 1$ の場合に限る.

このとき, 次の性質を満たす V の基底 $\{\alpha_i\} \subset \Delta$ が存在する: $\alpha \in \Delta$ を $\alpha = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$ と表した時, m_i はすべて非負の整数であるか, あるいはすべて非正の整数である. このような α_i を単純ルートと呼ぶ. m_i がすべて非負の整数であるようなルートを正ルートと呼び, 正ルートの全体を Δ^+ で表す. 特に, 単純ルートは正ルートである.

部分集合による非交和分解 $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$ について, 任意の $\alpha \in \Delta_1$, $\beta \in \Delta_2$ に対して $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0$ を満たすとき, Δ は可約であるといい, そうでないとき, Δ は既約であるという. 既約なルート系 Δ は, A_n $(n \geq 1)$, B_n $(n \geq 2)$, C_n $(n \geq 3)$, D_n $(n \geq 4)$, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 という型に分類できることが知られている. 以下では, Δ は既約なルート系であると仮定する.

$\alpha \in \Delta$ に対し, $|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ をルートの長さと呼ぶ. ルートの長さは, 既約なルート系 Δ の中で高々 2 種類しか無い. 従って, 長いルートを long ルート, 短いルートを short ルートと呼ぶ. Δ の中で長さが 1 種類しか無い場合には, すべてのルートを short ルートと呼ぶ.

また, $\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{i,j}$ $(1 \leq j \leq n)$ を満たす V の元 ϖ_i $(1 \leq i \leq n)$ を基本ウエイトと呼ぶ. ウエイト格子 P を, $P = \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varpi_i$ で定義する. $\langle \lambda, \alpha_j^\vee \rangle \geq 0$ を満たすウエイト $\lambda \in P$ を dominant ウエイト, $\langle \lambda, \alpha_j^\vee \rangle \leq 0$ を満たすウエイト $\lambda \in P$ を antidominant ウエイト, $\langle \lambda, \alpha_j^\vee \rangle \neq 0$ を満たすウエイト $\lambda \in P$ を regular ウエイトと呼ぶ.

Example 1.1. A_2 型ルート系を紹介する.

$V = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + v_2 + v_3 = 0\}$ とする. $\mathbb{R}^3$ の標準的な基底を $\{e_1, e_2, e_3\}$ とする. $\Delta = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\}$ は条件 (1), (2), (3), (4) を満たす. 単純ルートは, $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3$ である. 従って, 正ルートの全体は $\Delta^+ = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$ と表せる.

基本ウエイトは, $\varpi_1 = e_1$, $\varpi_2 = e_1 + e_2$ である. $\varpi_1 + \varpi_2$ は dominant ウエイトであり, regular ウエイトでもある.

1.2 Weyl 群

ルートに関する V 上の鏡映で生成される群 $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$ を Δ の Weyl 群と呼ぶ. Weyl 群は有限群である.

Weyl 群 W は, 単純ルートに関する鏡映 s_{α_i} $(1 \le i \le n)$ で生成される. 以下, 単純ルート α_i $(1 \le i \le n)$ に対し, $s_i = s_{\alpha_i}$ と書く.

任意の Weyl 群の元 $w \in W$ は, $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_p}$ と単純ルートについての鏡映の積で表せる. この表示は複数あるが, すべての表示の中で表示の長さ p が最小となるものを簡約表示という. 簡約表示の長さ p を w の長さといい, $\ell(w)$ で表す. 特に, $1 \le i \le n$ について, $\ell(s_i) = 1$ である. また, W の中で長さ最大の元を w_0 で表す.

W の元 w, ws_α $(\alpha \in \Delta)$ について, $\ell(ws_\alpha) = \ell(w) + 1$ を満たすとき, $w \lessdot ws_\alpha$ と書く. この 2 項関係の推移閉包 $(W, \le)$ を Bruhat 順序という.

Example 1.2. A_2 型の場合, W は 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ と同型である. 特に s_i は隣接互換 $(i\ i+1)$ と同一視される. また, $s_{\alpha_1+\alpha_2} = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ と表せる (これ以上短い表示は存在しない). 従って, $\ell(s_{\alpha_1+\alpha_2}) = 3$ とわかる. また, この元は W の中で長さ最大の元である. W の元を列挙すると以下の通りである ($w \lessdot ws_\alpha$ を $w \to ws_\alpha$ で表している):

$$
\begin{tikzcd}
 & e \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
s_1 \arrow[d] \arrow[drr] & & s_2 \arrow[d] \arrow[dll] \\
s_1 s_2 \arrow[dr] & & s_2 s_1 \arrow[dl] \\
 & \begin{array}{c} s_1 s_2 s_1 \\ \shortparallel \\ s_2 s_1 s_2 \end{array} &
\end{tikzcd}
$$

2 非対称 Macdonald 多項式

2.1 非対称 Macdonald 多項式

この節では, 非対称 Macdonald 多項式を定義する. 一般の非対称 Macdonald 多項式は最大で 6 個のパラメーターを持つが, 本講演では $t \to \infty$ の極限のみを考えるため, ここでは 2 個のパラメーター q, t を持つものもののみを考える. 一般の場合は, [M] を参照されたい.

まず, P 上の半順序を定義する. $\mu \in P$ に対し, $v_\mu \in W$ を $v_\mu \mu$ が dominant ウエイトとなるような最短の元とする. このとき, $\mu, \nu \in P$ に対し $\mu > \nu$ であるとは, 次のいずれかの条件を満たすことである:

(1) $0 \ne v_\mu \mu - v_\nu \nu \in \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\ge 0} \alpha_i$ が成り立つ.

(2) $v_\mu \mu = v_\nu \nu$ であり, W 上の Bruhat 順序について $v_\nu > v_\mu$ が成り立つ.

体 K を $\mathbb{Q}$ 上の変数 q, t についての有理関数体 $K = \mathbb{Q}(q, t)$ とし, weight lattice P の K 上の群環を A, その完備化である形式的冪級数環を $\widehat{A}$ とする:

$$
\begin{aligned}
A &= \{ f = \sum_{\mu \in P} f_\mu e^\mu \mid f_\mu \in K, f_\mu \text{は有限個を除いて} 0 \}, \\
\widehat{A} &= \{ f = \sum_{\mu \in P} f_\mu e^\mu \mid f_\mu \in K \}.
\end{aligned}
$$

但し, $e^\mu \cdot e^{\mu'} = e^{\mu+\mu'}$ $(\mu, \mu' \in P)$, $e^0 = 1$ であることに注意する.

$\overline{} : K \to K$ を q, t を q^{-1}, t^{-1} で取り替える K 上の involution とし, A 上の involution $\overline{} : A \to A$ を, $f = \sum_{\mu \in P} f_\mu e^\mu$ に対し $\overline{f} = \sum_{\mu \in P} \overline{f_\mu} e^{-\mu}$ で定義する. また, (定数項) 写像 $\mathrm{ct} : \widehat{A} \to K$ を $\sum_{\mu \in P} f_\mu e^\mu \mapsto f_0$ により

定める.

$\alpha \in \Delta$ に対し, ν_α と q_α を

$$\nu_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (\alpha \text{ は short ルート}), \\ 2 & (\mathfrak{g} \text{ は } B_n, C_n, F_4 \text{ 型で}, \alpha \text{ は long ルート}), \\ 3 & (\mathfrak{g} \text{ は } G_2 \text{ 型で}, \alpha \text{ は long ルート}), \end{cases}$$

$$q_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} q^{\nu_\alpha}$$

により定義する. ただし, $\mathfrak{g}$ が A_n, D_n, E_n 型 (ルートの長さが 1 種類) のときには $\nu_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} 1$ ($^\forall \alpha \in \Delta$) とする.

重み関数 $\nabla \in \widehat{A}$ を

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\alpha \in \Delta} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(1 - e^{\alpha} q_\alpha^j)(1 - e^{-\alpha} q_\alpha^{j+1})}{(1 - e^{\alpha} t q_\alpha^j)(1 - e^{-\alpha} t q_\alpha^{j+1})}$$

と定める. これにより, A 上の Hermite 内積 $(\cdot, \cdot) : A \times A \to K$ が, $f, g \in A$ に対し, $(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{ct}(f\overline{g}\nabla)/\mathrm{ct}(\nabla)$ により定義される. この内積は, 非退化かつ半双線型かつ $(f, g) = \overline{(g, f)}$ $(f, g \in A)$ を満たす.

このとき, A の K 上の基底 $\{E_\mu(q,t)\}_{\mu \in P}$ で次の (1), (2) を満たすものが一意に存在する (この $E_\mu(q,t)$ を非対称 Macdonald 多項式と呼ぶ):

(1) E_μ は, 最大項 e^μ を持つ.

(2) $\mu' < \mu$ を満たす任意の μ' に対し, $(E_\mu, e^{\mu'}) = 0$ が成り立つ.

Remark 2.1. 定義から直ちに $(E_\mu(q,t), E_{\mu'}(q,t)) = 0$ $(\mu \neq \mu')$ がわかる. すなわち, $\{E_\mu(q,t)\}_{\mu \in P}$ は A の (内積 $(\cdot, \cdot)$ についての) 直交基底となっている.

$E_\mu(q,t)$ における $e^{\mu'}$ $(\mu' \in P)$ の係数 $[E_\mu(q,t) : e^{\mu'}]$ を q, t の有理式として見て, 極限 $E_\mu(q,\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to\infty} E_\mu(q,t) = \sum_{\mu' \in P} \lim_{t \to \infty} [E_\mu(q,t) : e^{\mu'}] e^{\mu'}$ を考えると, $E_\mu(q,\infty)$ は well-defined である ([CO]).

2.2 非対称 Macdonald 多項式と対称 Macdonald 多項式

ここでは紙面の都合上定義を省略するが, 対称 macdonald 多項式 $\{P_\lambda(q,t) \mid \lambda \in P \text{ は dominant ウエイト}\}$ は A の W-不変な部分環の基底として同様に定義され, この部分環上の内積に関する直交基底となっている. 対称 Macdonald 多項式は, Hall-Littlewood 多項式, Jack 多項式, Askey-Wilson 多項式などの様々な対称多項式の一般化になっている.

3 非対称 Macdonald 多項式の $t = \infty$ での特殊化 $E_\mu(q, \infty)$ と表現論との関係

この節では表現論についての基礎知識を仮定する.

Δ をルートの集合として持つ有限次元複素単純 Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とする. $\mathfrak{g}$ の三角分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}^-$ とし, $\mathfrak{n}$ の基底を $\{e_{\beta_1}, \ldots, e_{\beta_N}\}$ $(\beta_1, \ldots, \beta_N \in \Delta^+)$ とする. カレント Lie 代数 $\mathfrak{g}[t] = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t]$ は次の関係式を満たす Lie 代数である: $[x \otimes t^m, y \otimes t^n] = [x, y] \otimes t^{m+n}$ $(x, y \in \mathfrak{g},\ m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$.

dominant ウエイト $\lambda \in P$ に対し, $\mathfrak{g}[t]$-加群 $W(\lambda)$ を次の関係式によって $v \neq 0$ から生成される加群として定義する:

$$\mathfrak{n} \otimes \mathbb{C}[t] \cdot v = 0,\ \mathfrak{h} \otimes t\mathbb{C}[t] \cdot v = 0,\ h \cdot v = \langle \lambda, h \rangle v\ (h \in \mathfrak{h}).$$

この $\mathfrak{g}[t]$-加群 $W(\lambda)$ を Weyl 加群と呼ぶ. Weyl 加群は有限次元である. $W(\lambda)$ の元 $v_{w_0\lambda}$ で $h \cdot v_{w_0\lambda} = \langle w_0\lambda, h \rangle v_{w_0\lambda}$ $(h \in \mathfrak{h})$ を満たすものはスカラー倍を除いて一意的に存在するので, その中で 0 でない $v_{w_0\lambda}$ を固定する. $v_{w_0\lambda}$ は, $\mathfrak{n}[t]$-加群として $W(\lambda)$ を生成する. すなわち, $v_{w_0\lambda}$ は, $U(\mathfrak{n}[t])$-加群として $W(\lambda)$ を生成する. ただし, $U(\mathfrak{n}[t])$ は生成元 $\mathfrak{n}[t]$ と関係式 $x \cdot y - y \cdot x = [x, y]$ $(x, y \in \mathfrak{n}[t])$ で生成される結合代数であり, $\mathfrak{n}[t]$ の universal enveloping algebra と呼ばれる.

$U(\mathfrak{n}[t])$ の部分空間 $U(\mathfrak{n}[t])_s$ を,

$$U_s = \{x_1 x_2 \cdots x_r \mid x_i \in \mathfrak{n}[t]\ (1 \leq i \leq r),\ r \leq s\}$$

で定義する．このとき, $U(\mathfrak{n}[t])$ の filtration $\mathbb{C} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U(\mathfrak{n}[t])$ により, $W(\lambda)$ の filtration $\mathbb{C}v_{w_0\lambda} = U_0 v_{w_0\lambda} \subset U_1 v_{w_0\lambda} \subset \cdots \subset U(\mathfrak{n}[t])v_{w_0\lambda} = W(\lambda)$ が得られる．これにより,

$$W^{\mathrm{gr}}(\lambda) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{C}v_{w_0\lambda} \oplus \left(\bigoplus_{s \geq 0} \frac{U_{s+1}v_{w_0\lambda}}{U_s v_{w_0\lambda}} \right)$$

と定義すると, $W^{\mathrm{gr}}(\lambda)$ は $W(\lambda)$ とベクトル空間として同型な $S(\mathfrak{n}[t])$-加群である．ここで, $S(\mathfrak{n}[t])$ は $\mathfrak{n}[t]$ で生成される可換環である．$S(\mathfrak{n}[t])$ は, 基底 $\{(e_{\beta_1}^{n_1} \cdots e_{\beta_N}^{n_N}) \otimes t^s \mid (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N,\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を持つ．$(e_{\beta_1}^{n_1} \cdots e_{\beta_N}^{n_N}) \otimes t^s$ の次数を $n_1 + \cdots + n_N$ とすると, $S(\mathfrak{n}[t])$ は次数付き可換環の構造を持つ．このとき, $W^{\mathrm{gr}}(\lambda)$ は次数付き $S(\mathfrak{n}[t])$-加群である (ただし, $v_{w_0\lambda}$ は次数 0 を持つとする).

$W^{\mathrm{gr}}(\lambda)$ の基底は以下のように書ける:

$$B = \{(e_{\beta_1}^{n_1} \cdots e_{\beta_N}^{n_N}) \otimes t^s \mid (n_1, \ldots, n_N) \in Z_\lambda, 0 \leq s \leq s(n_1, \ldots, n_N)\}.$$

ここで, Z_λ は λ により定まる $\mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ の部分集合であり, $s(n_1, \ldots, n_N)$ はこの非負整数の組 $(n_1, \ldots, n_N)$ から定まる 0 以上の整数である.

Cherednik と Orr は次の予想を立てた.

Conjecture 3.1. ([CO]) $\lambda \in P$ を dominant ウエイトとする．このとき, 次の等式が成立する:

$$E_{w_0\lambda}(q, \infty) = \sum_{(e_{\beta_1}^{n_1} \cdots e_{\beta_N}^{n_N}) \otimes t^s \in B} q^{n_1 + \cdots + n_N + s} e^{\lambda - n_1\beta_1 - \cdots - n_N\beta_N}.$$

講演では, W_λ の q-類似である, 量子群 $U_q(\mathfrak{n}[t])$ 上の加群 $W_q(\lambda)$ (これを量子 Weyl 加群と呼ぶ) の結晶基底を実現する quantum Lakshmibai-Seshadri path の集合の明示的部分集合を用いて, 非対称 Macdonald 多項式の $t = \infty$ での特殊化 $E_\mu(q, \infty)$ の明示的公式を与える.

参考文献

[CO] I. Chrerednik and D. Orr, Nonsymmetric difference Whittaker functions, preprint, arXiv:1302.4094.

[K] V. G. Kac, Infinite Dimensional Lie Algebras, 3rd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[M] I. G. Macdonald, Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 157, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.