アソシエーションスキーモイドの構成法とその性質

百瀬 康弘*
信州大学大学院 総合工学系研究科

アソシエーションスキームはBose–Shimamoto [1] によって統計の実験計画法の中で導入され, 現在では代数的組合せ論においても重要な研究対象となっている. また, アソシエーションスキーモイドはKuribayashi–Matsuo [2] によってアソシエーションスキームを小圏の表現論およびホモトピー論を用いて研究するために導入された概念である.

まずは, 小圏の基本事項を定義する.

定義 1. $\mathcal{C}$ が小圏とは対象と呼ばれる元からなる集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と, 射と呼ばれる元からなる集合 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ からなり以下を満たすときをいう.

1. 任意の射 f に対して 2 つの対象 $s(f)$ と $t(f)$ が定まる.
   - $s(f) = x$ かつ $t(f) = y$ のとき f を $f : x \to y$ とかき, x から y への射という.
   - 任意の対象 x, y に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \mid s(f) = x, t(f) = y\}$ と定める.
2. $t(f) = s(g)$ である任意の射 f, g に対して 1 つの射 $g \circ f : s(f) \to t(g)$ が定まり, $t(f) = s(g)$ かつ $t(g) = s(h)$ である射 f, g, h に対して $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ となる.
   - $g \circ f$ を f と g の合成という.
3. 任意の対象 x に対して射 id_x が存在して, 任意の射 $f : x \to y$ に対して $f \circ \mathrm{id}_x = f = \mathrm{id}_y \circ f$ となる.
   - $\mathrm{id}_x : x \to x$ を x の恒等射という.

定義 2. $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を小圏とする. F が $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への共変関手とは, $\mathcal{C}$ の任意の対象 x に対して $\mathcal{D}$ の対象 $F(x)$, $\mathcal{C}$ の任意の射 f に対して $\mathcal{D}$ の射 $F(f)$ が定まり以下の (FUN-0), (FUN-1), (FUN-2) を満たすものをいう.

(FUN-0). $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ ならば $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), F(y))$ となる.

(FUN-1). $t(f) = s(g)$ となる $\mathcal{C}$ の任意の射 f, g に対して $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ となる.

(FUN-2). $\mathcal{C}$ の任意の対象 x に対して $F(\mathrm{id}_x) = \mathrm{id}_{F(x)}$ となる.

また, F が (FUN-2) と次の (FUN-0)', (FUN-1)' を満たすとき F を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への反変関手という.

*e-mail: momose@math.shinshu-u.ac.jp

(FUN-0)'. $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)$ ならば $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(y),F(x))$ となる.

(FUN-1)'. $t(f) = s(g)$ となる $\mathcal{C}$ の任意の射 f, g に対して $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ となる.

F が $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への共変関手または反変関手のとき $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とかく.

次に, アソシエーションスキームの概念の本質的な一般化である擬スキーモイドの定義を述べる.

定義 3. $\mathcal{C}$ を小圏, S を $2^{\mathrm{Mor}(\mathcal{C})}$ の部分集合とする. このとき, $(\mathcal{C},S)$ が**擬スキーモイド**とは次を満たすときをいう.

1. $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \coprod_{\sigma \in S} \sigma$ となる.
2. 任意の $\sigma, \tau, \mu \in S$ と $f, g \in \mu$ に対して集合として次の同型が存在する.

$$\{(u,v) \in \sigma \times \tau \mid u \circ v = f\} \cong \{(u,v) \in \sigma \times \tau \mid u \circ v = g\}.$$

そして, 次がアソシエーションスキーモイドの定義であり, 擬スキーモイドに"ある種の対称性" を付加したものとなっている.

定義 4. $(\mathcal{C},S)$ を擬スキーモイド, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を反変関手とする. $(\mathcal{C},S,T)$ が**アソシエーションスキーモイド**とは次を満たすときをいう.

1. $J = \coprod_{x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x)$ としたとき, $\sigma \cap J \neq \emptyset$ となる任意の $\sigma \in S$ に対して $\sigma \subset J$ が成り立つ.
2. $T^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ となる.
3. 任意の $\sigma \in S$ に対して $T(\sigma) \in S$ が成り立つ.

この定義に出て来る T が"ある種の対称性" を表している. アソシエーションスキームはアソシエーションスキーモイドであり他にも, 亜群と呼ばれる小圏からアソシエーションスキーモイドを構成する方法が挙げられるがその他の構成法は知られていない. このことは, 自己同型反変関手 T をもつ小圏の例に乏しいことに依存している.

本講演ではまず, 自己同型反変関手 T をもつ小圏を構成する十分条件を述べる. 以下では小圏 $\mathcal{E}$ に対して射の向きを反対にした圏 (反対圏と呼ぶ) を $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$ で表し, $d_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\mathrm{op}}$ と $d_2 : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}$ を自明な反変関手とする. また, 小圏全体の圏を Cat と表す.

定理 5. $\alpha : \mathrm{Cat} \times \mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$ を以下を満たす共変関手とする.

- 小圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ に対して同型 $\Phi_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} : \alpha(\mathcal{C},\mathcal{D})^{\mathrm{op}} \to \alpha(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ が存在する.

- 小圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ に対して次は可換である.

$$\begin{tikzcd}
\alpha(\mathcal{C},\mathcal{D})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\Phi_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}"] & \alpha(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \\
\alpha(\mathcal{C},\mathcal{D}) \arrow[u, "d_1"'] \arrow[r, "\Phi^{-1}_{(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})}"] & \alpha(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \arrow[u, "d_2"']
\end{tikzcd}$$

このとき, 小圏 $\mathcal{C}$ に対して $T:\alpha(\mathcal{C},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})\to\alpha(\mathcal{C},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ を $T=\Phi_{(\mathcal{C},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})}\circ d_1$ と定義すると $T^2=\mathrm{id}_{\alpha(\mathcal{C},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})}$ となる.

定理の条件を満たす α として, 以下が挙げられる.

1. 非交和関手 $\coprod:\mathrm{Cat}\times\mathrm{Cat}\to\mathrm{Cat}$
2. 直積関手 $\times:\mathrm{Cat}\times\mathrm{Cat}\to\mathrm{Cat}$
3. join construction 関手 $*:\mathrm{Cat}\times\mathrm{Cat}\to\mathrm{Cat}$

但し, 小圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ に対して $\mathcal{C}*\mathcal{D}$ は次のような小圏である.

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}*\mathcal{D})=\mathrm{Ob}(\mathcal{C})\coprod\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.
- $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}*\mathcal{D})=\mathrm{Mor}(\mathcal{C})\coprod\mathrm{Mor}(\mathcal{D})\coprod\big(\mathrm{Ob}(\mathcal{C})\times\mathrm{Ob}(\mathcal{D})\big)$.

さらに, これらの関手は 2 つの擬スキーモイドから新たな擬スキーモイドを構成する関手でもあるので定理 5 の T を用いて, これらの関手が擬スキーモイドからアソシエーションスキーモイドを構成する関手となることを述べる.

系 6. $(\mathcal{C},S)$ を擬スキーモイド, $T:\mathcal{C}\coprod\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}\coprod\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を $\coprod:\mathrm{Cat}\times\mathrm{Cat}\to\mathrm{Cat}$ に対して定理 5 から得られた反変関手とする.

このとき, $(\mathcal{C}\coprod\mathcal{C}^{\mathrm{op}},S\coprod S^{\mathrm{op}},T)$ はアソシエーションスキーモイドである.

系 7. $(\mathcal{C},S)$ を擬スキーモイド, $T:\mathcal{C}\times\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}\times\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を $\times:\mathrm{Cat}\times\mathrm{Cat}\to\mathrm{Cat}$ に対して定理 5 から得られた反変関手とする.

このとき, $(\mathcal{C}\times\mathcal{C}^{\mathrm{op}},S\times S^{\mathrm{op}},T)$ はアソシエーションスキーモイドである.

系 8. $(\mathcal{C},S)$ を擬スキーモイド, $T:\mathcal{C}*\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}*\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を $*:\mathrm{Cat}\times\mathrm{Cat}\to\mathrm{Cat}$ に対して定理 5 から得られた反変関手とする.

このとき, $(\mathcal{C}*\mathcal{C}^{op},S*S^{op},T)$ はアソシエーションスキーモイドである.

参考文献

[1] R. C. Bose and T. Shimamoto, Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 47:151–184, 1952.

[2] K. Kuribayashi and K. Matsuo, Association schemoids and their categories. to appear in Applied Categorical Structures, preprint (2013). arXiv:1304.6883 math. CT.