

スイッチングシステムを用いた近似最適制御の構成

町田 夏久子*

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻

概要

本講演では最適制御問題における基本的な問題である近似最適制御構成の一手法を紹介する。実際、最適制御は存在しないことがあり、代替となる近似最適制御を考察するのは自然である。Clarke, Ledyev, Sontag, Subbotin (1997) は、古典的な最適制御の構成法を粘性解の枠組みに取り込み、粘性解の下限畳み込み (inf-convolution) 近似を通して近似最適制御の構成法を与えた。本講演で紹介する方法では、与えられた最適制御問題に対して、それを近似するスイッチング制御問題を考え、そのベルマン方程式の粘性解を用いて、近似最適制御を構成する。

1 はじめに

最適制御理論では、1960年代初頭に発展したポントリヤーギンの最大値原理とベルマンの動的計画法という二つの重要な研究がよく知られている。前者は、与えられた制御が最適制御であるための必要条件を与える結果で、これを用いると最適制御を具体的に構成できることがある。後者は、ベルマンの最適性原理に基づいて時間ごとの最適政策を求めるアルゴリズムの一つである。ベルマンは、最適制御問題に対応する値関数が動的計画法の原理を満たすことから値関数が滑らかと仮定した時に、それが満たすべき方程式としてハミルトン・ヤコビ方程式を導出した。最適制御に現れるハミルトン・ヤコビ方程式は、特にベルマン方程式(ここでは以下、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式と呼ぶ)と呼ばれることがある。ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式のなめらかな解を利用した最適フィードバック制御の構成法が動的計画法では知られている。

しかし、最適制御が存在しない問題があり、そのような問題を扱う際は、代替となる近似最適制御を考察するのは自然である。ポントリヤーギンの最大値原理は最適制御が存在する場合にのみ、その具体的な構成が期待できるような結果であるため、近似最適制御の具体的な構成は一般に期待できない。そこで、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式を用いた近似最適フィードバック制御の具体的な構成の可能性が期待されるが、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式のなめらかな解が存在するとは限らないため、工夫する必要がある。

Clarke, Ledyev, Sontag, Subbotin [3] は、動的計画法で知られている古典的な最適制御の構成法を粘性解の枠組みに取り込み、粘性解の下限畳み込み (inf-convolution) 近似を通して、必ずしも微分可能とは言えない粘性解を適当な近似を通して近似最適制御を構成した。粘性解とは、1981年に Crandall と Lions が導入した偏微分方程式の弱解の概念の一つである [1, 4, 7]。粘性解は、最大値原理に基づいて微分を試験関数に移行することで、通常の意味で微分不可能な関数を広い意味で微分可能な関数として扱うことができ、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式のような非線形性の強い方程式に対しても適用できるという利点がある。そのため、方程式をかなり一般的な形で扱うことができ、たとえば2階の退化楕円型・放物型方程式に対する理論が構築されている。

*correspondance: kakukomachida@akane.waseda.jp

本講演で紹介する方法では、与えられた最適制御問題に対して、それを近似するスイッチング制御問題を考え、対応するハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の粘性解を用いて、近似最適制御を構成する。関連した近似法の研究として、Barles, Jakobsen [2] も参照のこと。

2 準備

$f \in C(\mathbb{R}^N \times A, \mathbb{R}), g \in C(\mathbb{R}^N \times A, \mathbb{R}^N)$ が与えられていて、次の仮定を満たすとする。すべての $(x, a) \in \mathbb{R}^N \times A$ に対して、

$$\begin{cases} |f(x, a) - f(y, a)| \leq L_f |x - y|, \\ |g(x, a) - g(y, a)| \leq L_g |x - y|. \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、 $A \subset \mathbb{R}^M$ は制御集合とする。 \mathcal{A} を可測関数 $\alpha : [0, \infty) \rightarrow A$ 全体の集合とする。 $\alpha \in \mathcal{A}$ と $x \in \mathbb{R}^N$ に対して、以下の初期値問題の解を考察する。

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = g(X(t), \alpha(t)) \quad (t > 0), \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

(2.1) の解は、初期値 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ と $\alpha \in \mathcal{A}$ に依って定まる $t \in [0, \infty)$ の関数であるから、 $X(t; x_0, \alpha)$ と表記する。もし $\alpha \in \mathcal{A}$ が $\alpha(t) \equiv a \in A$ である場合、 $X(t; x_0, a)$ と表す。(2.1) で記述される制御系は $\alpha \in \mathcal{A}$ を通して制御されると考える。ここでは経費汎関数 J として次のものを考える。

$$J(x_0, \alpha) = \int_0^\infty f(X(t; x_0, \alpha), \alpha(t)) e^{-t} dt$$

値関数 V は次で与えられる。

$$V(x_0) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J(x_0, \alpha).$$

$x_0 \in \mathbb{R}^N$ を与えたとき、

$$V(x_0) = J(x_0, \alpha)$$

を満たす $\alpha \in \mathcal{A}$ を x_0 における**最適制御**と呼ばれるが、最適制御は一般には存在しない。そこで、代替となる ε -近似最適制御を考察したい。 $\varepsilon > 0$ に対して

$$|J(x_0, \alpha_\varepsilon) - V(x_0)| < \varepsilon.$$

を満たす $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{A}$ を ε -**近似最適制御**と呼ぶ。本講演の目的は、 ε -近似最適制御の構成法を与えることである。

f と g が前述した仮定を満たすとき、値関数 V はハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式

$$V(x) + \sup_{a \in A} \{-g(x, a) \cdot DV(x) - f(x, a)\} = 0 \quad (\text{HJ})$$

のただ一つの粘性解であり、 g のリプシッツ定数が 1 より大きければ V もリプシッツ連続、1 以下ならばヘルダー連続であることはよく知られている [1, 7]。

次に、近似最適制御の構成法を与える際に重要な役割を果たすスイッチング制御問題に対応するハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式系を用意する。具体的には

$$\max\{v(x, a) - g(x, a) \cdot D_x v(x, a) - f(x, a), v(x, a) - \inf_{b \neq a} \{v(x, b) + k\}\} = 0 \quad (\text{SS})$$

で与えられる. ここで, k は正の定数であり, v は未知関数, $D_x v$ は x 変数に関する勾配を表す.

(SS) の粘性解を考察する. 粘性解理論の観点では, (SS) のような無限システムの粘性解を取り扱うのに, 通常の粘性解の定義は適用できないため, 定義を修正する必要がある. Ishii, Shimano [5] は, あるパラメーター依存する関数偏微分方程式に対するコーシー問題の解の漸近挙動の研究で解析したある無限システムに対する粘性解の定義を, 各パラメーターごとに通常の粘性解の定義を用いるものとし, その解 (粘性解) の存在, 一意性を示した. その定義を参考にすると, (SS) の粘性解は定義 2.1 で定義される.

Definition 2.1. (1) v が (SS) の粘性劣解であるとは, 次が成り立つことである. $a \in A$ を固定する.

$$\begin{cases} \phi \in C^1(\mathbb{R}^N), x \in \mathbb{R}^N, \max_{\mathbb{R}^N \times A} v^*(\cdot, a) - \phi(\cdot) = v^*(x, a) - \phi(x) = 0, \\ \implies \max\{v^*(x, a) - g(x, a) \cdot D_x v^*(x, a) - f(x, a), v^*(x, a) - \inf_{a \neq b} \{v^*(x, b) + k\}\} \leq 0. \end{cases}$$

(2) v が (SS) の粘性優解であるとは, 次が成り立つことである. $a \in A$ を固定する.

$$\begin{cases} \phi \in C^1(\mathbb{R}^N), x \in \mathbb{R}^N, \min_{\mathbb{R}^N \times A} v_*(\cdot, a) - \phi(\cdot) = v_*(x, a) - \phi(x) = 0, \\ \implies \max\{v_*(x, a) - g(x, a) \cdot D_x v_*(x, a) - f(x, a), v_*(x, a) - \inf_{a \neq b} \{v_*(x, b) + k\}\} \geq 0. \end{cases}$$

(3) v が粘性劣解であり, 粘性優解でもあるとき, v は (SS) の粘性解であるという.

v^*, v_* はそれぞれ v の上半連続包, 下半連続包である.

3 主結果

Theorem 3.1. (SS) の有界な粘性解は一意に存在する

Theorem 3.2. $L_g < 1$ とする. すべての $a \in A$ に対して, (SS) の粘性解 $v(\cdot, a)$ は \mathbb{R}^N 上のリプシッツ連続関数で, そのリプシッツ定数は $L_f/(1 - L_g)$ である. $L_g \geq 1$ とし, $\theta L_g < 1$ を満たす $0 < \theta < 1$ を一つ固定する. 全ての $a \in A$ に対して, (SS) の粘性解 $v(\cdot, a)$ は \mathbb{R}^N 上指数 θ のヘルダー連続関数で, そのヘルダー定数は, $B_f^{1-\theta} L_f^\theta / (1 - \theta L_g)$ である.

Theorem 3.3. v^k は (SS) の粘性解, V は (HJ) の粘性解であるとする. v^k, V が同程度リプシッツ連続関数であるとき,

$$\sup_{(x,a) \in \mathbb{R}^N \times A} |v^k(x, a) - V(x)| = O(k^{1/3}).$$

$0 < \theta < 1$ とする. v^k, V が指数 θ の同程度ヘルダー連続関数であるとき,

$$\sup_{(x,a) \in \mathbb{R}^N \times A} |v^k(x, a) - V(x)| = O(k^{\theta/(2+\theta)}).$$

次に, ε -近似最適制御の構成のアルゴリズムを述べる. 簡単のため A はコンパクトと仮定する. $x_0 \in \mathbb{R}^N$ を固定し, 制御 α_k をつぎのように与える. そのために, 列 $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A$, $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset (0, 1]$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ をまず帰納的に定義する. x_{i-1} が与えられたとして, a_i, τ_i, x_i をつぎの式で定める.

$$\begin{aligned} a_i &\in \operatorname{argmin} v^k(x_{i-1}, \cdot), \\ \bar{\tau}_i &= \inf\{t > 0 \mid X(t; x_{i-1}, a_{i-1}) \in \partial B_r(x_{i-1})\}, \\ \tau_i &= \min\{\bar{\tau}_i, 1\}, \\ x_i &= X(\tau_i; x_{i-1}, a_{i-1}). \end{aligned}$$

このように与えられた $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}, (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ に対して, $\alpha_k \in \mathcal{A}$ を次式で定義する.

$$\alpha_k(t) = a_i \quad (t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], i \in \mathbb{N}).$$

ただし, $\tau_0 = 0$ とする. (関数 g の有界性より, $\inf_i \tau_i > 0$ が分り, α_k は $[0, \infty)$ 上の関数であることが確かめられる.)

$\varepsilon(k) \geq 0$ を

$$\varepsilon(k) = \sup_{(x,a) \in \mathbb{R}^N \times A} (v^k(x,a) - V(x))$$

と定義する. 定理 3.3 の仮定下では

$$\varepsilon(k) = O(k^{\theta/(2+\theta)}) \quad (k \rightarrow 0+)$$

が成り立つことに注意する.

Theorem 3.4. α_k と $\varepsilon(k)$ を上のように定義するとき, α_k は x_0 に対する $\varepsilon(k)$ -近似最適制御である.

参考文献

- [1] Bardi, Martino; Capuzzo-Dolcetta, Italo Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations. With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia. Systems and Control: Foundations and Applications. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997
- [2] Barles, Guy; Jakobsen, Espen R. Error bounds for monotone approximation schemes for Hamilton-Jacobi-Bellman equations. SIAM J. Numer. Anal. 43 (2005), no. 2, 540-558 (electronic)
- [3] Clarke F.H., Ledyaev Y.S., Sontag E.D., Subbotin A.I., Asymptotic controllability implies feedback stabilization, IEEE Trans. Automat. Control 42 (1997) 1394-1407.
- [4] Crandall, Michael G.; Ishii, Hitoshi; Lions, Pierre-Louis User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27 (1992), no. 1, 1—67.
- [5] Ishii, Hitoshi; Shimano, Kazufumi Asymptotic analysis for a class of infinite systems of first-order PDE: nonlinear parabolic PDE in the singular limit. Comm. Partial Differential Equations 28 (2003), no. 1-2, 409—438.
- [6] Hitoshi, Ishii; Shigeaki Koike On ε -optimal controls for state constraint problems. Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 17 (2000), no. 4, 473-502.
- [7] Lions, Pierre-Louis Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations. Research Notes in Mathematics, 69. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1982.