位相的トーリック多様体上の
複素直線束の切断の有限次元性

鍬田　英也　(大阪市立大学)*

概　　要

完備な扇に対応するトーリック多様体の上の直線束の正則な大域切断のなす空間が有限次元であることはよく知られた事実である．一方，石田-福川-枡田は (コンパクトかつ非特異な) トーリック多様体の一般化として位相的トーリック多様体 [IFM13] を導入した．トーリック多様体が扇と一対一対応するように，全向き付けされた (ominioriented) 位相的トーリック多様体にも位相的扇呼ばれる組合せ論的対象が一対一に対応する．位相的扇がある条件を満たす時に良い (nice) と呼ばれ，対応するものを良い (nice) 位相的トーリック多様体と呼ぶ ([Li12])．今回は良い位相的トーリック多様体に対し，適切な直線束と切断を考えることで，大域切断のなす空間が有限次元になることが分かったので以下で説明したいと思う．

1. 良い (nice) 位相的トーリック多様体と良い (nice) 位相的扇

位相的トーリック多様体は本来は位相的扇に関係なく定義されているものであるが，今回は簡単のため良い位相的扇をまず定義し，良い位相的扇に対応するものとして良い位相的トーリック多様体を導入する．大雑把に言うと良い位相的扇とは完備単体的扇と非特異多重扇 [Mas99] の組である．正確には次のように定義する．

K を頂点集合 $[m] = \{1, 2, ..., m\}$ 上の (有限) 単体複体とし，$\{(b_i, v_i)\}_{i=1}^m$ を整数ベクトルの対，ただし各 i に対して $b_i = (b_i^1, ..., b_i^n), v_i = (v_i^1, ..., v_i^n) \in \mathbb{Z}^n$ で，$j = 1, ..., n$ に対して $b_i^j \equiv v_i^j (\mathrm{mod} 2)$ とする．これらの組 $(K, \{(b_i, v_i)\}_{i=1}^m)$ が次の条件を満たすとき (n 次元) 良い位相的扇と言い Δ で表すことにする．

- 任意の $I \in K$ に対して，$\{b_i\}_{i\in I}$ は一次独立である．
- $\{v_i\}_{i\in I}$ は一次独立である．
- $I = \{i_1, ..., i_k\} \in K$ に対して，

$$\sigma_I := \{c_1 b_{i_1} + \cdots + c_k b_{i_k} | \quad c_j \geq 0 \quad \forall j\}$$

  と定義すると，任意の単体 $I, J \in K$ に対して $\sigma_I \cap \sigma_J = \sigma_{I\cap J}$ である．
- $\bigcup_{I\in K} \sigma_I = \mathbb{R}^n$(完備性)
- 任意の $I \in K$ に対して $\{v_i\}_{i\in I}$ は $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ 基底の一部を成す (非特異性)

例えば $K = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$, $(b_1, v_1) = (e_1, e_1), (b_2, v_2) = (e_2, e_2), (b_3, v_3) = (-e_1, -e_1 - 2e_2), (b_4, v_4) = (-e_1 - e_2, -e_1 - e_2)$ のとき以下の良い位相的扇が得られる．

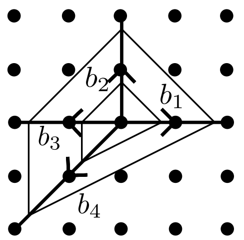

図 1: 完備単体的扇

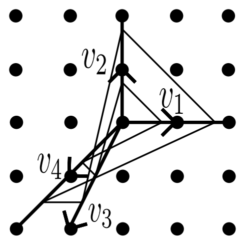

図 2: 非特異多重扇

---

* e-mail: `hideya0813@gmail.com`

良い位相的扇の情報を用いて，良い位相的トーリック多様体を次の商構成法 (quotient construction) で構成する．

まず $I \subset [m]$ に対して

$$U(I) := \{(z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m | z_i \neq 0 \quad \forall i \in I\}$$
$$U(K) := \bigcup_{I \in K} U(I)$$

と定義する．次に各 (b_i, v_i) に対して次の写像を考える．

$$\lambda_{(b_i,v_i)} : \mathbb{C}^* \to (\mathbb{C}^*)^n \quad h_i \mapsto (h_i^{(b_i^1, v_i^1)}, ..., h_i^{(b_i^n, v_i^n)})$$

ここで

$$h_i^{(b_i^j, v_i^j)} := h_i^{\frac{b_i^j + v_i^j}{2}} \bar{h}_i^{\frac{b_i^j - v_i^j}{2}}$$

で定義する．$b_i \equiv v_i (\mathrm{mod} 2)$ より指数は整数になることに注意.

この写像を座標ごとに掛ける合わせることにより次の全射群準同型 λ を定義する．

$$\lambda : (\mathbb{C}^*)^m \to (\mathbb{C}^*)^n \qquad (h_1, ..., h_m) \mapsto \prod_{i=1}^m \lambda_{(b_i,v_i)}(h_i)$$

$X(\Delta)$ を商空間

$$X(\Delta) := U(K)/\mathrm{Ker}\lambda = \bigcup_{I \in K} U(I)/\mathrm{Ker}\lambda$$

で定義し，これを良い位相的扇 Δ に付随する<u>良い位相的トーリック多様体</u> $X(\Delta)$ という.

<u>**注意.**</u> **1** $X(\Delta)$ はコンパクトかつ非特異である．

<u>**注意.**</u> **2** 各 i に対して $b_i = v_i$ ならば $X(\Delta)$ はトーリック多様体になる．

<u>**補題.**</u> **3 ([IFM13]Lemma.4.1)** λ は全射である．また $n-1$ 次元単体 $I \in K$ に対して $\{(b_i, v_i)\}_{i \in I}$ の双対 $\{(c_i^I, u_i^I)\}_{i \in I} (c_i, u_i \in \mathbb{Z})$ を

$$\langle (c_i^I, u_i^I), (b_j, v_j) \rangle := (\sum_{i \in I} c_i^{Ik} b_j^k, \sum_{i \in I} u_i^{Ik} v_j^k) = \delta_{ji}(1, 1) \quad (\text{for } j \in I)$$

で定義すると，このとき $I \in K$ に対して $\mathrm{Ker}\lambda$ は次の形で書ける．

$$\mathrm{Ker}\lambda = \{(h_1, ..., h_m) \in (\mathbb{C}^*)^m | \quad h_i \prod_{k \notin I} h_k^{\langle (c_i^I, u_i^I), (b_k, v_k) \rangle} = 1 \quad \text{for } \forall i \in I\}$$

■

以下，簡単のため $I = \{1, 2, ..., n\}$ とする．また適切な線形変換を行うことで一般性を失うことなく $\{(b_i, v_i)\}_{i=1}^n = \{(e_i, e_i)\}_{i=1}^n$ として良い．ここで $e_1, ..., e_n$ は標準基底を意味する．このとき，$\{(b_i, v_i)\}_{i=1}^n$ の双対 $\{(c_i^I, u_i^I)\}_{i=1}^n$ も $\{(e_i, e_i)\}_{i=1}^n$ となることに注意すると，$\mathrm{Ker}\lambda$ は次の形で書ける．

$$\mathrm{Ker}\lambda = \{(h_1, ..., h_m) \in (\mathbb{C}^*)^m | \quad h_i \prod_{k=n+1}^m h_k^{\langle (c_i^I, u_i^I), (b_k, v_k) \rangle} = 1 \quad \text{for } \forall i = 1, ..., n\}$$
$$= \{(h_1, ..., h_m) \in (\mathbb{C}^*)^m | \quad h_i \prod_{k=n+1}^m h_k^{(b_k^i, v_k^i)} = 1 \quad \text{for } \forall i = 1, ..., n\}$$
$$= \{(\prod_{k=n+1}^m h_k^{-(b_k^1, v_k^1)}, ..., \prod_{k=n+1}^m h_k^{-(b_k^n, v_k^n)}, h_{n+1}, ..., h_m)\} \cong (\mathbb{C}^*)^{m-n} = \{(h_{n+1}, ..., h_m) | h_{n+1}, ..., h_m \in \mathbb{C}^*\}$$

この同一視の下で $\mathrm{Ker}\lambda \cong (\mathbb{C}^*)^{m-n}$ の1次元表現 α を次のように定義する．

$$\begin{aligned} &Ker\lambda \cong (\mathbb{C}^*)^{m-n} \xrightarrow{\alpha} GL(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \\ &(h_{n+1},...,h_m) \mapsto \prod_{k=n+1}^{m} h_k^{(x_k,y_k)} \quad (x_k,y_k \in \mathbb{Z}, x_k \equiv y_k(\mathrm{mod}2)) \end{aligned}$$

注意. 4 α の表示は $n-1$ 単体 $I \in K$ の取り方に依存する．しかし別の $n-1$ 単体 $J \in K$ を用いても α は依然として $h_{i_k}, \bar{h}_{i_k}$(i_k は $1,...,m$ の中の異なる $m-n$ 個の数字) のローラン単項式なので意味がある (well-defined)．

2. 良い位相的トーリック多様体上の複素直線束

注意.4 より $Ker\lambda$ と $(\mathbb{C}^*)^{m-n}$ の同一視を1章で議論したもの ($I = \{1,2,...,m\}$) に固定して話を進める．

1節で定義した α に対して同伴直線束 L_α を以下で定義する．

$$L_\alpha := U(K) \times_{Ker\lambda} \mathbb{C}_\alpha \to X(\Delta)$$

ここで $\mathbb{C}_\alpha$ は α の表現空間である．また L_α の元は同値関係

$$[(z_1,...z_m),v] = h \cdot [(z_1,...,z_m),v] := [(\prod_{k=n+1}^{m} h_k^{-(b_k^1,v_k^1)} z_1, ..., \prod_{k=n+1}^{m} h_k^{-(b_k^n,v_k^n)} z_n, h_{n+1}z_{n+1},...,h_m z_m, \alpha(h_{n+1},...,h_m)v)]$$

による同値類である．

L_α に対して次の切断 s_f を考える．

$$\begin{aligned} &s_f : X(\Delta) \to U(K) \times_{\mathrm{Ker}\lambda} \mathbb{C}_\alpha \\ &(z_1,...,z_m) \mapsto [(z_1,...,z_m), f(z_1,...,z_m)] \end{aligned}$$

ここで f は

$$\begin{aligned} &f : U(K) \to \mathbb{C}_\alpha \\ &(z_1,...,z_m) \mapsto \prod_{l=1}^{m} z_l^{(p_l,q_l)} \quad (p_l,q_l \in \mathbb{Z}, p_l \equiv q_l(\mathrm{mod}2), p_l \geq 0, p_l \geq |q_l|) \end{aligned}$$

で次の関係式を満たすもの．

$$\begin{aligned} &f((h_{n+1},...,h_m)\cdot(z_1,...,z_m)) = \alpha(h_{n+1},...,h_m) f(z_1,...z_m) \\ &\Longleftrightarrow \\ &f(\prod_{k=n+1}^{m} h_k^{-(b_1^k,v_1^k)} z_1, ..., \prod_{k=n+1}^{m} h_k^{-(b_n^k,v_n^k)} z_n, h_{n+1}z_{n+1},...,h_m z_m) = \prod_{l=1}^{m} z_l^{(p_l,q_l)} f(z_1,...,z_m) \quad (*) \end{aligned}$$

注意. 5 条件 $p_l,q_l \in \mathbb{Z}, p_l \equiv q_l(\mathrm{mod}2), p_l \geq 0, p_l \geq |q_l|$ は各 z_l の指数部分が常に非負整数となるためのものである．

3. 主結果

命題. 6 $(*)$ を満たす f は有限個，すなわち切断 s_f は有限個である．

証明の概略. f は単項式なので $(*)$ を満たすことは，両辺の $h_i, \bar{h}_i (i = n,...,m+1)$ の指数部分がそれぞれ等しいことを示せばよい．実際に両辺を比較すると，

$$(\prod_{k=n+1}^{m} h_k^{-(b_k^1,u_k^1)} z_1)^{(p_1,q_1)}, ..., (\prod_{k=n+1}^{m} h_k^{-(b_k^n,v_k^n)} z_n)^{(p_n,q_n)}, (h_{n+1}z_{n+1})^{(p_{n+1},q_{n+1})}, ..., (h_m z_m)^{(p_m,q_m)} = \prod_{l=1}^{m} z_l^{(x_l,y_l)} f(z_1,...,z_m)$$

これを整理して変数$h_{n+1},...,h_m$の指数部分を両辺比較すると，

$$-\langle p, b_k\rangle + p_k = x_k \qquad \text{for} \quad k = n+1,...,m$$
$$-\langle q, v_k\rangle + q_k = y_k \qquad \text{for} \quad k = n+1,...,m$$

ここで

$p = (p_1,...,p_n), b_k = (b_k^1,...,b_k^n)$

$q = (q_1,...,q_n), v_k = (v_k^1,...,v_k^n)$

である．また$\langle\ ,\ \rangle$は通常の内積．

ただし

$$(h^{(b,v)})^{(p,q)} := h^{\langle(p,q),(b,v)\rangle}$$

で定義し，$\langle(p,q),(b,v)\rangle = (\sum_{i=1}^n p^i b^i, \sum_{i=1}^n q^i v^i)$であったことに注意．$p_i \geq 0, p_i \geq |q_i|$なので$p_i$の有限性が示せれば，$q_i$の有限性も自動的に示される．以下，$p_i$を含む式のみに注目する．$p_i \geq 0$より

$$p_k = x_k + \langle p, b_k\rangle \geq 0 \qquad \text{for} \quad k = n+1,...,m$$

従って

$$\langle p, b_k\rangle \geq -x_k \qquad \text{for} \quad k = n+1,...,m$$

さらに今$b_1,..,b_n$は標準基底で$p \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$より

$$\langle p, b_k\rangle \geq -x_k \qquad \text{for} \quad k = 1,...,m$$

ただし，$k = 1,...,n$に対して$x_k = 0$とする．このとき次が示せれば良い．

補題. 7

$$P := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, b_k\rangle \geq -x_k \qquad \text{for} \quad k = 1,...,m\}$$

は有界．

この証明に関しては [[Ful93]P.67,Proposition] とほぼ同様なのでそちらを参照．

以上より$p_1,...,p_n$が有限個である事が示せたので$p_{n+1},...,p_m$も有限個．従って先ほどの考察より$q_1,...,q_m$も有限個となる ■

$X(\Delta)$上の大域切断sはs_f達の線形結合であるから次を得る．

系. 8 良い位相的トーリック多様体$X(\Delta)$に対してその上の直線束L_αを2章で定義したものとする，このとき大域切断sの成す空間$\Gamma(X(\Delta), L_\alpha)$は有限次元である．

参考文献

[Ful93] William Fulton. Introduction to toric varieties. No. 131. Princeton University Press, 1993.

[IFM13] Hiroaki Ishida, Yukiko Fukukawa, and Mikiya Masuda. Topological toric manifolds. Mosc. Math. J., Vol. 13, No. 1, pp. 57–98, 189–190, 2013.

[Li12] Yu Li. On transition functions of topological toric manifolds. Dal'nevost. Mat. Zh., Vol. 12, No. 1, pp. 35–47, 2012.

[Mas99] Mikiya Masuda. Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index. 東北數學雜誌. Second series, Vol. 51, No. 2, pp. 237–265, 1999.