平面三次曲線と直線からなる半安定な組の GIT モジュライ

黒田　匡迪*　北海道大学大学院　理学院　数学専攻

概要

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の三次曲線と直線からなる半安定な組の GIT モジュライを $\overline{P}_{1,3}$ とする．本公演では，非安定，半安定あるいは安定な組の幾何学的な分類と $\overline{P}_{1,3}$ における非自明な同一視についての結果を紹介する．また、中村郁氏による Hesse の三次曲線のモジュライ $SQ_{1,3}$ や V. Alexeev 氏による完備なモジュライ $\overline{AP}_{1,3}$ との関係についての結果も紹介する．

1　GIT モジュライ $\overline{P}_{1,3}$

以下，標数が 2，3 でない代数閉体 k 上で考える．はじめに $\overline{P}_{1,3}$ の定義を与える．射影平面 $\mathbb{P}^2_k = \mathrm{Proj}(k[x_0, x_1, x_2])$ 上の一次斉次多項式全体 $k[x_0, x_1, x_2]_1$ の双対空間を V とする．S^3V を V 上の三次の対称代数，すなわち，三次斉次多項式全体 $k[x_0, x_1, x_2]_3$ の双対空間とし，$\mathrm{Sym}(V)$，$\mathrm{Sym}(S^3V)$ をそれぞれ V，S^3V 上の対称代数とする．このとき，$\mathbb{P}(V) := \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(V))$，$\mathbb{P}(S^3V) := \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(S^3V))$ はそれぞれ $\mathbb{P}^2_k$ に含まれるすべての直線，三次曲線からなる空間を表している．なぜならば $\mathbb{P}(V)$，$\mathbb{P}(S^3V)$ の各点はそれぞれ $S \in V^\vee = k[x_0, x_1, x_2]_1$，$F \in (S^3V)^\vee = k[x_0, x_1, x_2]_3$ の零点集合 $V(S)$, $V(F)$ と同一視できるからである．$\mathbb{P}^2_k$ 内の平面三次曲線と直線からなる組全体を表すファイバー積 $\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)$ 上に，三次射影線型群スキーム $\mathrm{PGL}(3)$ の $\mathbb{P}^2_k$ への自然な作用から誘導される作用を定める．すなわち，任意の $g \in \mathrm{PGL}(3)$，$(C, L) = (V(F(x)), V(S(x))) \in \mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)$ に対し，$g \cdot (C, L) := \left(V\left(F\left(g^{-1} \cdot x\right)\right), V\left(S\left(g^{-1} \cdot x\right)\right)\right)$ とする．この作用による半安定な組全体 $\left(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)\right)^{ss}$ の GIT-商を $\overline{P}_{1,3}$ とする：

$$p : \left(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)\right)^{ss} \longrightarrow \left(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)\right)^{ss} //\mathrm{PGL}(3) =: \overline{P}_{1.3}.$$

ここでは GIT-商の詳細な定義は省略するが，任意の z_1，$z_2 \in \left(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)\right)^{ss}$ に対して，GIT-商の定義から直ちに次が従う (GIT の詳細な議論については [2]，[4] あるいは [6] を見よ)：

$$p(z_1) = p(z_2) \Longleftrightarrow \overline{\mathrm{PGL}(3) \cdot z_1} \cap \overline{\mathrm{PGL}(3) \cdot z_2} \cap \left(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)\right)^{ss} \neq \emptyset. \tag{1}$$

従って，GIT-商 $\overline{P}_{1,3}$ は集合としては半安定な組の閉軌道全体のなす空間と等しい．

次に，組 (C, L) の安定性を調べる判定法を紹介する．それは D. Hilbert 氏と D. Mumford 氏による数値的判定法である．一次一般線型群スキーム $\mathbb{G}_m = \mathrm{GL}(1)$ から $\mathrm{PGL}(3)$ への射 λ を $\mathrm{PGL}(3)$ の 1 変数部分群という．$r_0 \geq r_1 \geq r_2$, $r_0 + r_1 + r_2 = 0$ を満たす整数 r_i を用いて $\lambda(t) = \mathrm{Diag}(t^{r_0}, t^{r_1}, t^{r_2})$ とかけるとき，λ は正規化された 1 変数部分群と呼ばれる．以下，λ はすべて正規化された 1 変数部分群とする．C, L の定義方程式をそれぞれ $F = \sum_{i+j\leq 3} a_{ij} x_0^{3-(i+j)} x_1^i x_2^j$, $S = \sum_{0\leq k\leq 2} b_k x_k$ とし，$H(x, y) := F(x)S(y)$ とする．任意の λ に対し，$\mu(H, \lambda) := \max\left\{(3 - i - j)\, r_0 + ir_1 + jr_2 + r_k \mid a_{ij} b_k \neq 0\right\}$ とする．

* E-mail: m-kuroda@math.sci.hokudai.ac.jp

定理 1.1. ([4], Theorem 2.1.)
組 (C,L) はあらゆる λ に対して $\mu(H,\lambda)\geq 0$ となるとき半安定であり，$\mu(H,\lambda)>0$ となるとき安定である．半安定でないものを非安定と呼ぶ．

上記の数値的判定法を用いて，半安定な組の幾何学的な条件を調べたいが，λ は無数に存在するので，半安定な組を直接分類するのは困難である．そのため，ある λ に対して $\mu(H,\lambda)<0$ となる，すなわち，非安定となる $H(x,y)=F(x)S(y)$ の係数の条件を決定する．この条件と同値な (C,L) の幾何学的な条件を求めることで，非安定な組の幾何学的な分類が得られる．この幾何学的な条件を否定することで，半安定な組の幾何学的な分類が得られる．さらに，この半安定な条件に加えて，ある λ に対して $\mu(H,\lambda)=0$ となることを仮定して，同様の操作を行うことで，半安定な組と安定な組を分類することが出来る．

定理 1.2. （半安定あるいは安定な組 (C,L) の幾何学的条件）
半安定あるいは安定な組 (C,L) の分類は以下の表で与えられる．下の表に含まれない組 (C,L) はいずれも非安定である．下の表における列 k の半安定な組全体のなす $\left(\mathbb{P}(S^3V)\times\mathbb{P}(V)\right)^{ss}$ の部分集合を S_k とする．

C	C と L	安定性	k
非特異	L は C と横断的に交わる	安定	1
	L は C と二重に接する	半安定	2
三角形	L は C と横断的に交わる	安定	3
直線 L' + 二次曲線 Q	L, L' は Q と横断的に交わる	安定	4
	L は Q と二重に接する	半安定	5
	L' は Q と二重に接する	半安定	6
	L, L' は Q と二重に接する	半安定	7
結節三次曲線	L は C と横断的に交わる	安定	8
	L は C と二重に接する	半安定	9
尖点三次曲線	L は C と横断的に交わる	安定	10
	L は C と二重に接する	半安定	11

次に，(1) を用いた $\overline{P}_{1,3}$ における非自明な同一視を紹介する．簡単な計算により，次が従う：

補題 1.3. 半安定な組 $z_i\in S_i$ $(i=3,5,6,7,11)$ を以下で定める：

$$
\begin{aligned}
&z_3=(V(x_0x_1x_2),V(x_0+x_1+x_2)), \qquad z_5=(V(x_0(x_0x_2+x_1(x_1+x_2))),V(x_2)),\\
&z_6=(V(x_0(x_0x_2+x_1(x_0+x_1))),V(x_2)),\ z_7=\left(V(x_0(x_0x_2+x_1^2)),V(x_2)\right),\\
&z_{11}=\left(V(x_0^2x_2+x_1^2(x_0+x_1)),V(x_2)\right).
\end{aligned}
$$

このとき, $S_3=\mathrm{PGL}(3)\cdot z_3$, $S_5=\mathrm{PGL}(3)\cdot z_5+\mathrm{PGL}(3)\cdot z_7$, $S_6=\mathrm{PGL}(3)\cdot z_6+\mathrm{PGL}(3)\cdot z_7$, $S_7=\mathrm{PGL}(3)\cdot z_7$, $S_{11}=\mathrm{PGL}(3)\cdot z_{11}$ が成り立つ.

この補題より, $p(S_3)$, $p(S_7)$, $p(S_{11})$ は $\overline{P}_{1,3}$ において一点からなることがわかる．さらに, $p(S_5)=p(S_7)$ を示せる．これは $p(z_5)=p(z_7)$ を示せば十分である．各 $a\in k^{\times}$ に対し，$g_a\in\mathrm{PGL}(3)$ を $g_a^{-1}:(x_0,x_1,x_2)\mapsto$

$(x_0/a, x_1, ax_2)$ で定める．このとき

$$g_a \cdot z_5 = (V(x_0(x_0x_2 + x_1(x_1 + ax_2))), V(x_2)) \in \left(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)\right)^{ss}$$

が成り立つ．従って $\lim_{a \to 0} g_a \cdot z_5 = z_7$ が成り立つので，(1) より $p(z_5) = p(z_7)$ を得る．同様にして，次の $\overline{P}_{1,3}$ における非自明な同一視，すなわち，PGL(3) の作用では移りあわないが，閉軌道が交わるものを得る．

命題 1.4. $p(S_3), p(S_5), p(S_6), p(S_7), p(S_{11})$ は $\overline{P}_{1,3}$ において一点からなり, $p(S_5) = p(S_6) = p(S_7) = p(S_{11})$ が成り立つ．

2 $\overline{P}_{1,3}$ と $\overline{AP}_{1,3}$ との比較

$\overline{P}_{1,3}$ と V. Alexeev 氏により [1] において構成された完備モジュライ空間 $\overline{AP}_{1,3}$ との比較を与える．$\overline{AP}_{1,3}$ は高々，結節点を持つ三次曲線 C と C の特異点を通らない直線 L からなる組 (C, L) のモジュライである．

$W_{\mathrm{Cusp}} := p(S_{10}) + p(S_{11}) \subset \overline{P}_{1,3}$ とし，$W_{\mathrm{T}} \subset \overline{AP}_{1,3}$ を三次曲線 C と C に 3 重で接する直線 L からなる組 (C, L) 全体とする．また，$Y := \overline{P}_{1,3} \setminus W_{\mathrm{Cusp}}$，$Z := \overline{AP}_{1,3} \setminus W_{\mathrm{T}}$ とする．このとき，恒等写像 $f : Y \to Z$, $(C, L) \mapsto (C, L)$ は有理写像 $f : \overline{P}_{1,3} \to \overline{AP}_{1,3}$ を定め，その逆写像 $f^{-1} : Z \to Y$ は f の逆有理写像を定める．従って $f : \overline{P}_{1,3} \to \overline{AP}_{1,3}$ は双有理写像であり，f，f^{-1} の基点集合はそれぞれ W_{Cusp}，W_{T} である．f のグラフを $G(f) = \mathrm{Im}\,((\mathrm{id}, f) : Y \to Y \times Z) \subset \overline{P}_{1,3} \times \overline{AP}_{1,3}$ とすると次が成り立つ：

定理 2.1. W_{Cusp} と W_{T} はいずれも $\mathbb{P}^1_k$ と同型であり，

$$W_{\mathrm{Cusp}} \times W_{\mathrm{T}} = \mathrm{pr}_1^{-1}(W_{\mathrm{Cusp}}) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(W_{\mathrm{T}}) = \overline{G(f)} \setminus G(f),$$

但し，pr_1，pr_2 はそれぞれ $\overline{P}_{1,3} \times \overline{AP}_{1,3}$ から $\overline{P}_{1,3}$，$\overline{AP}_{1,3}$ への標準射影である．

3 $SQ_{1,3} \times \mathbb{P}(V)$ のブローアップから $\overline{AP}_{1,3}$, $\overline{P}_{1,3}$ への写像

二つのモジュライ $\overline{AP}_{1,3}$ と $\overline{P}_{1,3}$ の構造を調べる為に，$X := SQ_{1,3} \times \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^2_k$ のあるブローアップから $\overline{AP}_{1,3}$，$\overline{P}_{1,3}$ への自然な写像を構成する．ここで，$SQ_{1,3}$ は中村郁氏により [5] において構成された Hesse の三次曲線のモジュライであり，$\mathbb{P}(V)$ は第一章で述べた $\mathbb{P}^2_k$ 内の直線全体がなす空間である．

X の各点は Hesse の三次曲線 C と直線 L からなる組

$$C : \mu_0(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) = 3\mu_1 x_0x_1x_2,\ L : b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$$

に対応するので，X の一般の点から $\overline{AP}_{1,3}$ あるいは $\overline{P}_{1,3}$ への写像が定まるが，C が三角形をなし，かつ L が C の特異点を通るときに $\overline{AP}_{1,3}$，$\overline{P}_{1,3}$ への写像が定義できず，L が C に三重で接するときに $\overline{P}_{1,3}$ への写像が定義できない．これらの写像が定義できない部分集合に含まれる点への適切な近づけ方を考えると，対応する点列は $\overline{AP}_{1,3}$ あるいは $\overline{P}_{1,3}$ の点に収束することがわかる．

例 3.1. X のアファイン開集合 $U = \mathrm{Spec}\left(k\left[s, t, u, \frac{1}{u^3-1}\right]\right)$，$s = b_0/b_2$，$t = b_1/b_2$，$u = \mu_0/\mu_1$ において，前者の定義できない部分集合は $(u = s = 0) \cup (u = t = 0)$ であり，後者の定義できない部分集合 (で U の原点 O を通るもの) は $(s = \zeta_3^j u, t = \zeta_3^{2j} u)$，$0 \leq j \leq 2$ である．但し，ζ_3 は 1 の原始三乗根とする．このとき，U の点 (s, t, u) に対応する組 $C : u(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) = 3x_0x_1x_2$，$L : sx_0 + tx_1 + x_2 = 0$ において，$y_0 = x_0$,

$y_1 = x_1$，$y_2 = ux_2$ とすると，$C : y_0^3 + y_1^3 + u^3y_2^3 = 3y_0y_1y_2$，$L : (s/u)y_0 + (t/u)y_1 + y_2 = 0$ となる．$\ell_c := (s = c_0u, t = c_1u)$，$(c_0, c_1) \neq (\zeta_3^j, \zeta_3^{2j})$ に沿って $u \to 0$ とすると $(s, t, u) \to O$ であり，対応する組は

$$C : y_0^3 + y_1^3 = 3y_0y_1y_2,\ L : c_0y_0 + c_1y_1 + y_2 = 0$$

に収束する．このとき C は結節点 $p := (0 : 0 : 1)$ を持つ結節三次曲線であり，L は p を通らない．故に $\overline{AP}_{1,3}$ の点であり，$(c_0, c_1) \neq (\zeta_3^j, \zeta_3^{2j})$ より，$\overline{P}_{1,3}$ の点でもある．同様に，適切な近づけ方を考えると，$(u = s = 0) \cup (u = t = 0) \setminus O$ に対応する極限は C が直線 L' + 二次曲線 Q となる組であり，$(s = \zeta_3^j u, t = \zeta_3^{2j} u) \setminus O$ に対応する極限は C が尖点三次曲線となる組である．

従って，写像が定義できない部分集合を中心に適当なブローアップを行うことで，例外集合からこれらの極限への写像を構成することが出来る．実際，前者の定義できない部分集合を中心に三回ブローアップを行うことで得られるスキーム $\tilde{X}$ から $\overline{AP}_{1,3}$ への写像 $\varphi : \tilde{X} \to \overline{AP}_{1,3}$ が構成でき，さらに，$\tilde{X}$ における後者の定義できない部分集合の強変換を中心に三回ブローアップを行うことで得られるスキーム $\hat{X}$ から $\overline{P}_{1,3}$ への写像 $\psi : \hat{X} \to \overline{P}_{1,3}$ が構成できる (紙面の都合上，φ と ψ の詳細な定義を述べることは出来ない．詳しくは [3], Definition 5.3.1，5.4.1 を見よ)．特に，これらの写像の構成の仕方から $\overline{AP}_{1,3}$ と $\overline{P}_{1,3}$ の (粗い) 構造が得られる．加えて，これらの写像と第二章で構成した双有理写像との関係も得られる：

系 3.2. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\psi} & \overline{P}_{1,3} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & \overline{AP}_{1,3} \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

が存在する．但し，π は前者の三回ブローアップであり，p は後者の三回ブローアップである．このとき，$\varphi^{-1}(W_{\mathrm{T}})$ と $\psi^{-1}(W_{\mathrm{Cusp}})$ はそれぞれ三回ブローアップ p の中心と例外集合である．

参考文献

[1] V. Alexeev, *Complete moduli in the presence of semiabelian group action*, Ann. of Math. **155** (2002), 611–708.

[2] I. V. Dolgachev, *Lectures on invariant theory*, volume 296 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, (2003).

[3] M. Kuroda, *On the GIT moduli of semistable pairs consisting of a plane cubic curve and a line*, doctoral thesis (to appear)

[4] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 34, Springer-Verlag, (1994).

[5] I. Nakamura, *Stability of degenerate abelian varieties*, Invent. Math. **136** (1999), 659–715.

[6] P. E. Newstead, *Lectures on Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Tata Inst. Lecture Notes, Springer-Verlag, (1978).