# リーマン面からの調和写像の収束について

お茶の水女子大学創成科学研究科　博士課程 1 年
小塚菜美

## 0　はじめに

本講演ではリーマン面からの調和写像の存在定理について発表する。[2] によれば、次のことが成り立つ。

**主定理.** $\Sigma$ をコンパクトリーマン面、$N$ をコンパクトリーマン多様体とする。
このとき $\varphi \in C^0 \cap H^{1,2}(\Sigma, N)$ に対し、調和写像 $u : \Sigma \to N$ で $\varphi$ とホモトピックなものが存在するかあるいは、非自明で等角な調和写像 $v : S^2 \to N$ が存在する。

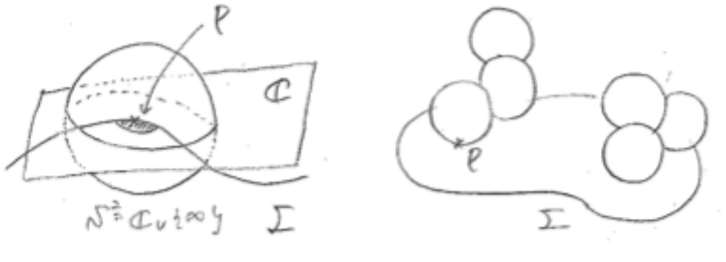
ここで調和写像は、リーマン多様体の間の写像 $f : (M, \gamma) \to (N, g)$ に対して定義されるエネルギー汎関数 $E(f) := \frac{1}{2}\int_M \|df\|^2 dM$ の臨界点として定義される。調和写像の例としては、曲線の長さの臨界点である測地線 ($M$ が $S^1$ の場合) や表面積の臨界点である極小曲面 ($M$ の次元が 2 の場合の平均曲率 0 の曲面) などがあげられる。

このように調和写像を多様体の間の性質のよい写像と考えることができるので、与えられた写像のホモトピー類に調和写像は存在するかという問題は基本的である。一般には調和写像が存在しないホモトピー類もあるが、次のような場合には調和写像が存在することが知られている。

(1) 値域の多様体 $N$ が負曲率を持つとき

(2) $\dim M = 2$ かつ $\pi_2(N) = 0$ であるとき

また (2) の場合は $\pi_2(N) \neq 0$ であるときでもバブリング現象を考慮し $\pi_2(N)$ を代表する調和写像を付け加えることで、そのホモトピー類の代表元をとることができる。ここで調和写像のバブリング付き収束とは、写像が収束しない点 $P$ が存在するとき適当にスケーリングすることでその点でも収束するような写像 (バブル) を付け加えて収束を考えることである (図 1 参照)。これが上記主定理の主張である。




(図 1) バブリングのイメージ

[2] ではこのバブリング付き調和写像の存在を示すために、局所的にエネルギー最小な写像列 $u_n$ の構成を考えている。この写像列の極限が調和写像になることの議論が難点であるが、著者の Palais-Smale 条件による証明を私は正当化することができなかったので、少し異なる方法で証明した。本講演ではこの主定理の証明を行う。

# 1　準備

**定義 1.1.** $(M,\gamma),(N,g)$ をリーマン多様体とする。
$f:M\to N$ のエネルギー密度 $e(f)$ とエネルギー $E(f)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} e(f) &:= \frac{1}{2}\|df\|^2 = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(x)g_{ij}(f(x))\frac{\partial f^i(x)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^\beta} \\ E(f) &:= \int_M e(f)dM \end{aligned}$$

このエネルギーの臨界点、すなわち次のオイラーラグランジュ方程式の解を調和写像という。

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}f^i)+\gamma^{\alpha\beta}(x)\Gamma^i_{jk}(f(x))\frac{\partial}{\partial x^\alpha}f^j\frac{\partial}{\partial x^\beta}f^k=0$$

**注意 1.1.**

- オイラーラグランジュ方程式は楕円型二階偏微分方程式であり、特にユークリッド空間の場合はラプラシアン $\Delta=0$ と一致する。
- また [1] より、連続かつ $H^{1,2}$ 写像であれば滑らかな調和写像になる。特に $\dim M=2$ のときは、連続でなくても滑らかな調和写像になる。

**定義 1.2.** (ソボレフ空間)
ナッシュの埋め込み定理 [3] と写像の連続性より、局所座標が次の $\mathbb{R}^n$ ソボレフ空間の定義を満たすときにリーマン多様体間のソボレフ空間を定義する。:
自然数 $k$ と $1\le p<\infty$ と $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ : 開集合に対し、

$$\begin{aligned} H^{k,p}(\Omega) &:= \{f\in L^p(\Omega):^{\forall}\alpha,|\alpha|\le k : D_\alpha f\in L^p(\Omega)\} \\ \|f\|_{H^{k,p}(\Omega)} &:= \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega |D_\alpha f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

**注意 1.2.** $H^{k,p}$ はバナッハ空間であり、特に $H^{1,2}$ はヒルベルト空間となる。

**定理 1.1.** (ディリクレ解の存在と一意性 [1])
$\Sigma$ をコンパクトリーマン面、$D\subset\Sigma$ を円盤、$N$ を完備リーマン多様体とし、$r>0$ は十分小さいとする。このとき $\varphi\in C^0\cap H^{1,2}(D,B(p,r))$ に対し

$$h=\varphi \quad (\partial D\ \text{上})$$

を満たす写像の中で、エネルギー最小な写像 $h\in H^{1,2}(D,B(p,r))$ が存在する [2]。
また $h_1,h_2$ が同じ境界値に対するディリクレ解であるとき、

$$h_1=h_2 \quad \text{が成り立つ。}$$

## 2　証明のメインアイディア

$\varphi$ から始まる写像のエネルギー減少列 $u_n$ を構成する。$\Sigma$ をディスク $B(x_n, r_n)$ で被覆し $u_n(B(x_n, r_n))$ が $N$ の測地球に入るような半径 $r_n$ を選ぶと、測地球 $B(x_n, r_n)$ 内で調和写像のディリクレ問題が解けるので、その上で $u_n$ を取り替えたものを $u_{n+1}$ とする。

この写像列の極限が、調和写像になることを示す。一般に内点における調和写像の収束は知られているためディスクの内点では調和写像に収束することが従うが、境界での極限が調和写像になるかどうかが問題になる。次の二つの場合が考えられる。

1. $\inf_{n\in\mathbb{N}} r_n > R \neq 0$ のとき

2. $\inf_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$ のとき

1. のときは、$u_n$ の極限がある調和写像に一様収束する。$p \in \Sigma$ を一点固定し、$p$ を含む近傍 $B(p, \frac{R}{2})$ における収束を示す。$u_n$ が収束する部分列 $u_{n_i}$ で、$B(p, \frac{R}{2})$ を含むようなディスク $B(x_{n_i}, r_{n_i})$ が存在するものをとる。部分列 $u_{n_i}$ と $u_{(n-1)_i}$ の極限が一致することを示せばよい。二つの部分列の極限を $u^1_\infty$ と $u_\infty$ とする。

ここで著者の Palais-Smale 条件による証明の代わりに次の補題を示して、以下のように証明を完成させた。

**補題.** エネルギー最小な写像 $h_n : \Sigma \supset B(x_n, r_n) \to N$ が $h$ に $H^{1,2}$ 弱収束、境界で一様収束しているとする。このとき、$\inf_{n\in\mathbb{N}} r_n \neq 0$ が成り立つならば、$\lim_{n\to\infty} E(h_n) = E(h)$ が成り立つ。

この補題が成り立てば、エネルギー下半連続性から $u_\infty$ と $u^1_\infty$ のエネルギーが等しくなるので特に $u_\infty$ と $u^1_\infty$ はディスクの境界値に対してエネルギー最小となる。従って調和写像になることがわかる。境界値に対する調和写像の一意性 [4] より $u_\infty = u^1_\infty$ が成り立つので、$u_n$ はディスクの境界でも調和写像に収束することがわかる。

また 2. のときはバブリングが起きる。すなわち $r_n$ を適当に正規化し直し上と同様の議論を行うことで、$S^2$ からの等角調和写像に収束することを示すことができる。

## 参考文献


[1] F.Hélein. Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne. C.R.Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 312 (1991), 591-596

[2] J.Jost. Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Springer, (2000)

[3] John Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds, Annals of Mathmatics 63 (1956), 20-63

[4] W.Jäger and H.Kaul. Uniqueness and stability of harmonic maps and their Jacobi fields. Man. math. 28 (1979), 269-291


[1] 一意性は [4] を参照。

[2] 厳密には $\kappa$ を $N$ の断面曲率の上界、$i_0$ を $N$ の単射半径、$p \in N$ とするとき、$0 < r < min(\frac{i_0}{2}, \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}})$ ならば $\min\{E(h) : h \in H^{1,2}(D, B(p, r)), h - \bar{g} \in H^{1,2}_0(D, B(p, r))\}$ を実現する写像 $h$ がただ 1 つ存在する。