結び目のHOMFLY多項式を用いたMilnorの μ-不変量の表現

小鳥居 祐香*
東京大学大学院数理科学研究科
数理科学連携基盤センター iBMath 拠点

概 要

絡み目とは，有限個の円周の３次元球面への埋め込みである．絡み目の Milnor 不変量とは，絡み数の一般化として定義された整数列によって定まる絡み目の不変量の族である．Polyak により，長さ３の数列から定まる Milnor 不変量は結び目の Conway 多項式によって表されることが示されている．一方，Habegger と Lin によって Milnor 不変量はストリング絡み目の不変量としても定義され，μ-不変量と呼ばれている．μ-不変量をストリング絡み目のある条件のもとで HOMFLY 多項式で表したので，これについて報告する．特に，長さ３の数列から定まる μ-不変量の場合においては任意のストリング絡み目に対して HOMFLY 多項式と絡み数で表わすことが出来たので，これについても報告する．

1 導入

絡み目とは，有限個の円周の３次元球面への埋め込みである．特に一つの円周の埋め込みを結び目と呼ぶ．結び目理論において，絡み目あるいは結び目のアンビエントアイソトピーと呼ばれる同値関係による分類は基本的な研究課題である．これらを分類するため，多くの絡み目（および結び目）の不変量が構成されている．絡み目の不変量とは，アンビエントアイソトピーで移りあう絡み目どうしの値が変わらないような絡み目全体の集合から数量や代数的量への写像である．絡み目の不変量を用い，絡み目どうしを直接比較するのではなく，比較が容易である代数的量を見つけ，それらを比較することを考える．結び目理論は，この絡み目の不変量を研究する理論であるとも言える．

本結果は，絡み目の類似であるストリング絡み目と呼ばれる対象に対する不変量である Milnor 不変量を他の既存の不変量で表現したものである．以下，ストリング絡み目の Milnor 不変量と HOMFLY 多項式について紹介し，主結果であるこれらの関係について述べる．

*本研究の一部は、文部科学省「生命動態システム科学推進拠点事業」の支援を受けて実施されたものである。

2　ストリング絡み目に対する Milnor の μ-不変量

絡み目の Milnor 不変量とは，絡み数の一般化として 1954 年に Milnor [M1, M2] によって定義された 3 次元球面内の順序付き有向絡み目に対する不変量の族である．また，後に Habegger-Lin[HL] により，ブレイド群の Artin 表現の拡張として定義されたストリング絡み目に関する自己同型写像の正規部分群が構成され，このストリング絡み目に対する不変量が本質的に Milnor 不変量であるということが示されている．

ストリング絡み目とは，有限個の単位区間 I の円盤と単位区間の直積への proper な埋め込みの像で，単位区間 I の両端点が上下の円盤上で同じ位置にくるものである (図 1).（ストリング絡み目から絡み目へは closure による自然な全射が存在する.）

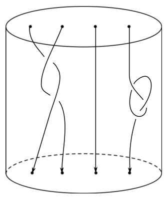

図 1: ストリング絡み目

任意の順序付き n 成分ストリング絡み目 σ に対して，その補空間の基本群 $\pi_1(D^2 \times I \setminus \sigma)$ をその q 番目の降中心部分群で割った商群は，n 個の生成元からなる自由群を q 番目の降中心部分群で割った商群と同型になる．ストリング絡み目の各成分のロンジチュードをこの商群の中で見ることで，その Magnus 表現を考える．自由群の Magnus 表現とは，自由群 $F(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ からそれに対応する非可換な形式的冪級数環 $\mathbb{Z}[[X_1, \cdots, X_n]]$ への生成元 m_i を $1 + X_i$ に移す忠実な群準同型写像である．

j 番目の成分のロンジチュードの Magnus 表現を与えたとき，各項 $X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}$ の係数は，$k < q$ のときストリング絡み目のイソトピー不変量となっている．これを $\mu_\sigma(i_1, i_2, \cdots, i_k, j)$ で表し，Milnor の μ-不変量と呼ぶ．特に，数列 $i_1, i_2, \cdots, i_k, j$ が互いに異なるとき，$\mu_\sigma(i_1, i_2, \cdots, i_k, j)$ は絡み目ホモトピーに関する不変量となる．絡み目ホモトピーとはイソトピーと自己交差交換によって生成される同値関係である．

特に，長さ 2 の Milnor 不変量は絡み数 lk と一致する．図 2 のストリング絡み目 σ_1 と σ_2 の長さ 2 の Milnor 不変量は $\mu_{\sigma_1}(1,2) = lk_{\sigma_1}(1,2) = 1$ および $\mu_{\sigma_2}(1,2) = lk_{\sigma_2}(1,2) = 0$ である．

図 2: ストリング絡み目 σ_1 と 2 成分自明ストリング絡み目 σ_2

また，Milnor 不変量によって図 3 のボロミアンストリング絡み目 σ_3 と 3 成分自明ストリング絡み目 σ_4 が絡み目ホモトピーに関して異なるストリング絡み目であることを示すことが出来る．実際，$\mu_{\sigma_3}(1,2,3)=1$ であり，$\mu_{\sigma_4}(1,2,3)=0$ となることから，２つのストリング絡み目が異なることがわかる．

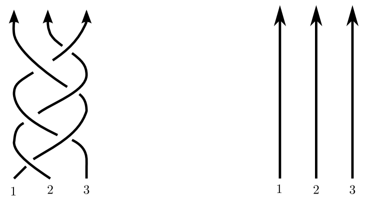

図 3: ボロミアンストリング絡み目 σ_3 と 3 成分自明ストリング絡み目 σ_4

3 HOMFLY 多項式

HOMFLY 多項式とは，アレキサンダー多項式やジョーンズ多項式を特別な場合として含むような多項式不変量であり，この多項式の複数の発見者にちなみ，そのイニシャルをとり命名されたものである．

有向絡み目 L に対して，L の HOMFLY 多項式 $P(L;t,z)\in\mathbb{Z}[t^{\pm1},z^{\pm1}]$ は次の 2 つの関係式によって特徴付けられる 2 変数多項式の絡み目の不変量である．

1. $P(U;t,z)=1$,
2. $t^{-1}P(L_+;t,z)-tP(L_-;t,z)=zP(L_0;t,z)$,

ここで，U は自明な結び目，また L_+ および L_-，L_0 はある 3 次元球体の内側では以下のように異なり，残りの部分では一致しているような絡み目である．

$L_+=$  ; $L_-=$  ; $L_0=$  .

特に，n 成分絡み目 L の HOMFLY 多項式は

$$P(L;t,z)=\sum_{k=1}^{N}P_{2k-1-r}(L;t)z^{2k-1-r}$$

と表せる．ここで，$P_{2k-1-r}(L;t)\in\mathbb{Z}[t^{\pm1}]$ は L の $(2k-1-r)$ 番目の係数多項式と呼ばれる．

さらに，HOMFLY 多項式に $z = 1$ を代入した t に関する多項式は Conway 多項式 $\bigtriangledown_L(t)$ と呼ばれている．

4 有限型不変量

Milnor 不変量と HOMFLY 多項式は以下で述べるように有限型と呼ばれる不変量の族であることが知られている．これを用いて，今回の主結果である関係式を導いた．まず有限型不変量について定義を紹介する．

特異結び目とは，３次元球面への円周のはめ込みで特異な点として有限個の二重点のみ持つものである．そのとき，任意のアーベル群 G に対して，G に値を持つような結び目の不変量 v を特異結び目の不変量に拡張することを考える．拡張の仕方は次のような関係式で行う．(拡張された不変量も v で表すこととする．)

$$v(\times) = v(\times) - v(\times).$$

そのとき，有限型不変量とは次のように定義される．

定義１． (Vassiliev) 結び目不変量 v が次数 m 以下の有限型不変量であるとは，$m+1$ 個の特異点を持つ任意の特異結び目に対する値が全て 0 である．

ここで，V_m を次数 m 以下の有限型不変量全体と定義すると，以下のようなフィルトレーションが得られる．

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m \subset V_{m+1} \subset \cdots .$$

このとき，V_0 は定値写像のみ，$V_0 = V_1$，$V_2 \setminus V_1$ は Conway 多項式の２次の係数 a_2 の定数倍で表されるなど，次数の低い有限型不変量はすでに知られている．

絡み目やストリング絡み目の場合も各成分ごとに同様に定義ができる．以下のように Milnor 不変量と HOMFLY 多項式は有限型であることが示されている．

定理１． (Bar-Natan) ストリング絡み目 σ に対する Milnor 不変量 $\mu_\sigma(i_1, i_2, \cdots, i_k, j)$ は次数 k の有限型不変量である．

定理２． (Kanenobu-Miyazawa) 任意の絡み目 L に対して，HOMFLY 多項式の k 番目の係数多項式 $P_k(L;t)$ の $t = 1$ における l 階微分 $P_k^{(l)}(L;1)$ は次数 $k+l$ の有限型不変量である．

Polyak 氏により次数が２の有限型不変量に対応する絡み目の Milnor 不変量 $\overline{\mu}(i_1, i_2, i_3)$ と，次数２の結び目の有限型不変量である Conway 多項式の２次の係数 a_2 との関係が示されている ([P])．この関係は次数２の結び目の有限型不変量が本質的に a_2 のみであることを用いている．さらにこの拡張として，成分数の異なる絡み目の同じ次数の有限型不変量の間の関係を考えた Meilhan 氏および安原氏の結果がある ([MY])．これは，絡み目の Milnor 不変量と結び目の HOMFLY 多項式の関係式を得たものである．さらにその結果を改良した安原氏と著者との結果 ([KY]) もある．今回の結果はこれらの関係式をストリング絡み目に対して与えたものである．

5　主結果

ストリング絡み目の Milnor 不変量と結び目の HOMFLY 多項式に関して，ある条件の元で以下のような 1 つの関係式を得た．

ここで，ストリング絡み目から結び目を構成する closure operation を以下のように定義する．

σ を n 成分ストリング絡み目とする．また，整数列 $12\cdots n$ の置換によって得られる数列 $I = i_1 i_2 \cdots i_n$ とその部分列 $J = j_1 j_2 \cdots j_k$ の組が与えられたとき，以下の操作で結び目を構成する．まず，σ_J を σ の $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 以外の紐を他のすべての紐の下にくる自明な紐に取り替えた n 成分ストリング絡み目とする．また，b_I を置換 $b = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{k-1} & i_k \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_k & i_1 \end{pmatrix}$ によって以下の構成で定義される n 成分ブレイドとする．線分 S_{i_p} $(1 \leq p \leq n)$ を $(i_p, 0)$ と $(b(i_p), 1)$ を繋いだ線分とし，交点に各 k $(1 \leq k \leq n-1)$ に対して $S_{b^k(1)}$ が $S_{b^{k'}(1)}$ $(k < k')$ の下となるよう上下の情報を定める．このとき結び目 $\overline{\sigma_{I,J}}$ を σ_J と b_I の積の通常の closure により定義する．

定理 3． 任意の $n(\geq 4)$ 成分ストリング絡み目 σ に対して，その長さ $n-2$ 以下の Milnor の絡み目ホモトピー不変量が全て消えているとき，数列 $12\cdots n$ の置換によって得られる任意の整数列 I に対して，以下の関係式が成り立つ．

$$\mu_\sigma(I) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!2^{n-1}} \sum_{J:I\ \text{の部分列}} (-1)^{|J|} P_0^{(n-1)}(\overline{\sigma_{I,J}}; 1).$$

ここで，$|J|$ は数列 J の長さを表す．

さらに，長さ 3 の MIlnor 不変量に関しては，ストリング絡み目に対する制限がなく，以下の関係式を得た．

定理 4． 任意の $n(\geq 3)$ 成分ストリング絡み目 σ と 1 から n の間の互いに異なる整数からなる列 $I = i_1 i_2 i_3$ に対して，以下の関係式が成り立つ．

$$\mu_\sigma(I) = -\sum_{J:I\ \text{の部分列}} (-1)^{|J|} a_2(\overline{\sigma_{I,J}}) - lk_\sigma(i_1 i_2) lk_\sigma(i_2 i_3) + A_I.$$

ここで，

$$A_I = \begin{cases} lk_\sigma(i_1 i_2) & (i_2 < i_3 < i_1) \\ -lk_\sigma(i_1 i_2) & (i_1 < i_3 < i_2) \\ 0 & (otherwise). \end{cases}$$

とする．

6　例

図 4 で表される 3 成分ストリング絡み目を σ とする．そのとき，$\mu_\sigma(132) = -1$，$\mu_\sigma(312) = 1$，$\mu_\sigma(231) = \mu_\sigma(123) = \mu_\sigma(321) = \mu_\sigma(213) = 0$．さらに，$lk_\sigma(12) = lk_\sigma(23) = 0$ および $lk_\sigma(13) = 1$ となる．

一方，$\overline{\sigma_{123,J}}$ は全て自明な絡み目となる．よって，定理２の関係式の右辺は

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{J<123}(-1)^{|J|}a_2(\overline{\sigma_{123,J}}) - lk_\sigma(12)lk_\sigma(23) = 0 - 0\cdot 0 = 0,\\
&-\sum_{J<231}(-1)^{|J|}a_2(\overline{\sigma_{231,J}}) - lk_\sigma(23)lk_\sigma(31) = 0 - 0\cdot 1 = 0,\\
&-\sum_{J<312}(-1)^{|J|}a_2(\overline{\sigma_{312,J}}) - lk_\sigma(31)lk_\sigma(12) + lk_\sigma(13) = 0 - 0\cdot 0 + 1 = 1.
\end{aligned}
$$

さらに，$\overline{\sigma_{132,132}}$ と $\overline{\sigma_{132,13}}$ はともに８の字結び目であり，８の字結び目の Conway 多項式は $1-z^2$ より，$a_2(\overline{\sigma_{132,132}}) = a_2(\overline{\sigma_{132,13}}) = -1$ また，$\overline{\sigma_{132,J}}$ $(J \neq 132, 13)$ はすべて自明な結び目．よって，定理２の関係式の右辺は

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{J<132}(-1)^{|J|}a_2(\overline{\sigma_{132,J}}) - lk_\sigma(13)lk_\sigma(32) - lk_\sigma(13) = -1,\\
&-\sum_{J<213}(-1)^{|J|}a_2(\overline{\sigma_{213,J}}) - lk_\sigma(21)lk_\sigma(13) = 0,\\
&-\sum_{J<321}(-1)^{|J|}a_2(\overline{\sigma_{321,J}}) - lk_\sigma(32)lk_\sigma(21) = 0.
\end{aligned}
$$

となる．

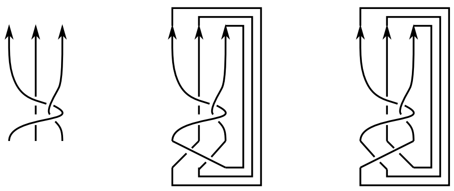

図 4: ストリング絡み目とその closure operation によって得られる結び目

7 謝辞

この度は第１１回数学区総合若手研究集会に参加させていただき，また講演の機会を与えていただきありがとうございました．このような機会を与えて下さった運営委員の方々にお礼申し上げます.

参考文献

[HL] N. Habegger and X.S. Lin, *The classification of links up to link-homotopy*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 389–419.

[KY] Y. Kotorii, A. Yasuhara, *Milnor invariants of length $2k+2$ for links with vanishing Milnor invariants of length $\leq k$*, arXiv:1304.1870.

[MY] J.B. Meilhan and A. Yasuhara, *Milnor invariants and the HOMFLYPT polynomial*, Geom. Topol. **16** (2012), 889–917.

[M1] J. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 177–195.

[M2] J. Milnor, *Isotopy of links*, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 280–306, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

[P] M. Polyak, *On Milnor's triple linking number*, C. R. Acad. Sci. Paris Sé. I Math. **325** (1997), no. 1, 77–82.