Multi-Poly-Bernoulli numbers と Poly-Bernoulli numbers の関係性

古牧　弘幸　(北海道大学大学院理学院数学専攻)

1　Introduction

ベルヌーイ数は、Jakob Bernoulli により 1713 年に発見され、べき乗和の公式、リーマンゼータ関数や多重ゼータ値と関係 ([1],[2]) があるものである。本講演では、まず各々の定義を挙げる。次に Multi-Poly-Bernoulli numbers(以下 MPBN と略す) の関係式を挙げ、そこから多重ベルヌーイ数と MPBN の間にある関係式について紹介する。

Definition1.1(ベルヌーイ数)
ベルヌーイ数 B_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を逐次

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i = n+1$$

で定める。なお n が 3 以上の奇数のとき、$B_n = 0$　が知られている。

1997 年には金子昌信氏によってベルヌーイ数の一般化である多重ベルヌーイ数 (Poly-Bernoulli numbers)$B_n^{(k)}$ が定義され、さらにその後 MPBN:$B_n^{(k_1,\cdots,k_n)}$ が導かれた。

Definition1.2(多重ベルヌーイ数)
多重ベルヌーイ数 $B_n^{(k)} \in \mathbf{Q}\,(n \geq 0, k \in \mathbb{Z})$ を、母関数により

$$\frac{Li_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k)}\frac{t^n}{n!}$$

で定義する。ここで $Li_k(t)$ は形式的ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$ を表す。

この定義は、ベルヌーイ数の一般化であり、$k = 1$ のとき $Li_k(1-e^{-t})$=t となるので、ベルヌーイ数の母関数表示

$$\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}$$

と一致する。

Definition1.3(MPBN)
Multi-Poly-Bernoulli numbers $B_n^{(k_1,\cdots,k_r)}$ を整数 $k_1, \cdots, k_r$ を用いて

$$\frac{Li_{k_1,\cdots,k_r}(1-e^{-t})}{(1-e^{-t})^r}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k_1,\cdots,k_r)}\frac{t^n}{n!}$$

と定義する。ここで、$Li_{k_1,\cdots,k_r}(t)$ は

$$Li_{k_1,\cdots,k_r}(t)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{t^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

と定義する。r=1 のときは多重ベルヌーイ数と一致し、r=1 かつ k_1=1 のときはベルヌーイ数と一致する。これらのことから MPBN は多重ベルヌーイ数の一般化であり、多重ベルヌーイ数はベルヌーイ数の一般化となっていることがわかる。

2 Multi-Poly-Bernoulli numbers の関係式

上指数が負の MPBN はべき乗の形で以下のように表される。

Theorem2.1 ([3])

r を正整数とし、$k_1,\cdots,k_r$ を $(k_1,\cdots,k_r)\neq(0,\cdots,0)$ である非負整数とする。$k:=k_1+\cdots+k_r$ とおく。このとき、次の等式が成り立つ。

$$B_n^{(-k_1,\cdots,-k_r)}=\sum_{l=1}^{k}\alpha_l^{(k_1,\cdots,k_r)}(l+r)^n$$

ここで $\alpha_l^{(k_1,\cdots,k_r)}$ $(1\leq l\leq k)$ は $k_1,\cdots,k_r$ にのみ依存する整数で、次の漸化式により帰納的に定まる。

(i) $\alpha_l^{(k_1)}=(-1)^{l+k_1}l!\left\{ {k_1 \atop l} \right\}$

(ii) $\alpha_l^{(k_1,\cdots,k_{r-1},0)}=\alpha_l^{(k_1,\cdots,k_{r-1})}$

(iii) $\alpha_l^{(k_1,\cdots,k_{r-1},k_r+1)}=(l+r-1)\alpha_{l-1}^{(k_1,\cdots,k_r)}-l\alpha_l^{(k_1,\cdots,k_r)}$

ここで

$$\alpha_0^{(k_1,\cdots,k_r)}=\begin{cases}1 & (k_1,\cdots,k_r)=(0,\cdots,0)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

であり、$\alpha_l^{(k_1,\cdots,k_r)}=0$ $(l>k)$ である。

$\left\{ {n \atop m} \right\}$ は第 2 種スターリング数であり、n 元集合を m 個の空でない部分集合に分ける方法の数である。

ここで Theorem2.1 において、$(k_1,\cdots,k_r)=(0,\cdots,0)$ なら、$B_n^{(\overbrace{0,\cdots,0}^{r})}=r^n$ である。また、theorem2.1 から次の特殊な場合の関係式が成り立つ。

Theorem2.2

(1)$B_n^{(-1,\overbrace{0,\cdots,0}^{r-1})}=(r+1)^n=B_n^{(\overbrace{0,\cdots,0}^{r+1})}$

(2)$B_n^{(\overbrace{0,\cdots,0}^{r-1},-1)}=r(r+1)^n$

(3)$B_n^{(\overbrace{0,\cdots,0,-1,0,\cdots,0}^{r})}=i(r+1)^n$ $(1\leq i\leq r)$ (i 番目の値を -1 とする。)

(3) において $i=1$ のとき (1) であり、$i=r$ のとき (2) となっている。証明は Theorem2.1 を用いることで得られる。

3 Main Results

上指数が負の多重ベルヌーイ数と MPBN の間にある関係式を紹介する。まず、Theorem2.2 で挙げた MPBN の特殊な値が上指数が負の多重ベルヌーイ数の結合和として書けることを紹介する。

Theorem3.1$(r\geq 1)$

(1) $B_n^{(-1,\overbrace{0,\cdots,0}^{r-1})}=\dfrac{1}{r!}\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\begin{bmatrix}r\\k\end{bmatrix}B_n^{(-k)}$

(2) $B_n^{(\overbrace{0,\cdots,0}^{r-1},-1)}=\dfrac{1}{(r-1)!}\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\begin{bmatrix}r\\k\end{bmatrix}B_n^{(-k)}$

(3)$B_n^{(\overbrace{0,\cdots,0,-1,0,\cdots,0}^{r})}=\dfrac{i}{r!}\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\begin{bmatrix}r\\k\end{bmatrix}B_n^{(-k)}$ (i 番目の値を -1 とする。)

$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}$ は第 1 種スターリング数であり、m 個のサイクルからなる n 次置換 (n 次対称群の元) の個数である。Theorem3.1 の一般化として次が成り立つ。

Theorem3.2$(r \geq 1)$

(1) $B_n^{(-m,\overbrace{0,\cdots,0}^{r-1})} = \sum_{l=1}^{m} \frac{(-1)^{l+m} l! \left\{ {m \atop l} \right\}}{(r+l-1)!} \sum_{k=1}^{r+l-1} \begin{bmatrix} r+l-1 \\ k \end{bmatrix} B_n^{(-k)}$

(2) $B_n^{(\overbrace{0,\cdots,0}^{r-1},-m)} = \sum_{l=1}^{m} \frac{(-1)^{l+m} (r)_{l-1} \left\{ {m \atop l} \right\}}{(r+l-2)!} \sum_{k=1}^{r+l-1} \begin{bmatrix} r+l-1 \\ k \end{bmatrix} B_n^{(-k)}$

ここで、$(r)_l = r(r+1)\cdots(r+l-1)$,$(r)_0 = 1$ である。

(3) $B_n^{\overbrace{(0,\cdots,0,-m,0,\cdots,0)}^{r}} = \sum_{l=1}^{m} \frac{(-1)^{l-m} (i)_l \left\{ {m \atop l} \right\}}{(r+l-1)!} \sum_{k=1}^{r+l-1} \begin{bmatrix} r+l-1 \\ k \end{bmatrix} B_n^{(-k)}$ (i 番目の値を $-m$ とする。)

Example3.3 (Theorem3.1 の $2 \leq r \leq 4$ の場合)

$$
\begin{aligned}
B_n^{(-1,0)} &= \frac{1}{2} B_n^{(-1)} + \frac{1}{2} B_n^{(-2)} \\
B_n^{(-1,0,0)} &= \frac{1}{3} B_n^{(-1)} + \frac{1}{2} B_n^{(-2)} + \frac{1}{6} B_n^{(-3)} \\
B_n^{(-1,0,0,0)} &= \frac{1}{4} B_n^{(-1)} + \frac{11}{24} B_n^{(-2)} + \frac{1}{4} B_n^{(-3)} + \frac{1}{24} B_n^{(-4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_n^{(0,-1)} &= B_n^{(-1)} + B_n^{(-2)} \\
B_n^{(0,0,-1)} &= B_n^{(-1)} + \frac{3}{2} B_n^{(-2)} + \frac{1}{2} B_n^{(-3)} \\
B_n^{(0,0,0,-1)} &= B_n^{(-1)} + \frac{11}{6} B_n^{(-2)} + B_n^{(-3)} + \frac{1}{6} B_n^{(-4)}
\end{aligned}
$$

また、$B_n^{(-m,\overbrace{0,\cdots,0}^{r-1})}$, $B_n^{(\overbrace{0,\cdots,0}^{r-1},-m)}$, $B_n^{\overbrace{(0,\cdots,0,-m,0,\cdots,0)}^{r}}$ を r のべき乗の結合和で表したときの係数和に注目すると次のことがわかる。

Corollary3.4$(r \geq 1)$

(1) $B_n^{(-m,\overbrace{0,\cdots,0}^{r-1})}$ の係数和は 1

(2) $B_n^{(\overbrace{0,\cdots,0}^{r-1},-m)}$ の係数和は r^m

(3) $B_n^{\overbrace{(0,\cdots,0,-m,0,\cdots,0)}^{r}}$ の係数和は i^m (i 番目の値を $-m$ とする。)

今度は上指数が負の多重ベルヌーイ数を MPBN の特殊な値の結合和を用いて表す。

Theorem3.5

多重ベルヌーイ数 $B_n^{(-k)}$ $(n \geq 0, k \geq 1)$ は次のように表せる。

(1)$B_n^{(-k)} = (-1)^{k-1} B_n^{(0,0)} + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{r+k+1} (r+1)! \left\{ {k \atop r+1} \right\} B_n^{(-1,\overbrace{0,\cdots,0}^{r})}$

(2)$B_n^{(-k)} = (-1)^{k-1} B_n^{(0,0)} + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{r+k+1} r! \left\{ {k \atop r+1} \right\} B_n^{(\overbrace{0,\cdots,0}^{r},-1)}$

(3)$B_n^{(-k)} = (-1)^{k-1} B_n^{(0,0)} + \sum_{r=i}^{k+i-2} (-1)^{r-i+k} \frac{(r-i+2)!}{i} \left\{ {k \atop r-i+2} \right\} B_n^{\overbrace{(0,\cdots,0,-1,0,\cdots,0)}^{r-i+2}}$ (i 番目の値を -1 とする。)

Example3.6 $(1 \leq k \leq 4)$

$$
\begin{aligned}
(1)\ B_n^{(-1)} &= B_n^{(0,0)} \\
B_n^{(-2)} &= -B_n^{(0,0)} + 2B_n^{(-1,0)} \\
B_n^{(-3)} &= B_n^{(0,0)} - 6B_n^{(-1,0)} + 6B_n^{(-1,0,0)} \\
B_n^{(-4)} &= -B_n^{(0,0)} + 14B_n^{(-1,0)} - 36B_n^{(-1,0,0)} + 24B_n^{(-1,0,0,0)}
\end{aligned}
$$

(2) $B_n^{(-1)}{=}B_n^{(0,0)}$

$B_n^{(-2)}{=}{-}B_n^{(0,0)}+B_n^{(0,-1)}$

$B_n^{(-3)}{=}B_n^{(0,0)}-3B_n^{(0,-1)}+2B_n^{(0,0,-1)}$

$B_n^{(-4)}{=}{-}B_n^{(0,0)}+7B_n^{(0,-1)}-12B_n^{(0,0,-1)}+6B_n^{(0,0,0,-1)}$

また Theorem3.5 で挙げた式の MPBN の係数和は次のようになる。

Corollary3.7 ($k=1$ のときは 1)

(1) $(-1)^{k-1}+\sum_{r=1}^{k-1}(-1)^{r+k+1}(r+1)!\left\{ {k \atop r+1} \right\}{=}1$

(2) $(-1)^{k-1}+\sum_{r=1}^{k-1}(-1)^{r+k+1}r!\left\{ {k \atop r+1} \right\}{=}0$

(3) $(-1)^{k-1}+\sum_{r=i}^{k+i-2}(-1)^{r-i+k}\frac{(r-i+2)!}{i}\left\{ {k \atop r-i+2} \right\}{=}\begin{cases} 1 & (k:\text{奇数}) \\ \frac{2}{i}-1 & (k:\text{偶数}) \end{cases}$

参考文献

[1] 荒川恒男・伊吹山和義・金子昌信　著、ベルヌーイ数とゼータ関数、牧野書店 (2001)

[2] 荒川恒男・金子昌信、「多重ゼータ値入門」，九州大学 MI レクチャーノート、vol.23,(2010)

[3] K.Kamano,A formula for Multi-Poly-Bernoulli numbers of negative index.Kyushu J. Math.67,(2013)