作用素環による McKay 対応の拡張

北川めぐみ
お茶の水女子大学理学部数学科

1　有限群の線形表現

1.1　線形表現に関する一般的なこと

V を複素数体 $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間とし、$GL(V)$ を V からそれ自身への上への**同型写像**全体のなす群とする。V が n 個の元よりなる有限基底 (e_i) を持つとする。$GL(V)$ の元である任意の線形写像 $a{:}\, V \to V$ が同型写像ということは、a の行列式が零でないことと同値である。このようにして、群 $GL(V)$ は、n **次可逆正方行列**全体のなす群と同一視される。

今 G を有限群とし、その単位元を 1、その演算を $(s,t) \longmapsto st$ とする。G の V における**線形表現**とは、G から群 $GL(V)$ の中への準同型写像 ρ である。言い換えれば、各元 $s \in G$ に、$GL(V)$ の元 $\rho(s)$ を対応させて、等式

$$s,t \in G \text{ に対して、} \rho(st) = \rho(s)\rho(t)$$

が成立するとき、写像 ρ を線形表現というのである。$\rho(s)$ の代わりにしばしば ρ_s とも書く。ρ が与えられたとき、V を G の**表現空間**（または単に**表現**）という。V が有限次元で、その次元を n とするとき、n を考えている表現の**次数**と呼ぶ。

ρ, ρ' を同じ群 G の、それぞれベクトル空間 V, V' におけるふたつの線形表現とする。これらの表現が**同値**である（または**同型**である）とは、等式

$$\text{各 } s \in G \text{ に対し、} \tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau$$

を満たすような線形同型写像 $\tau{:}\, V \to V'$ が存在することをいう。

群 G の 1 次の表現は、準同型写像 $\rho{:}\, V \to \mathbf{C}^*$ である。ここで、$\mathbf{C}^*$ は 0 でない複素数全体のなす乗法群を表す。G の各元は有限位数だから、ρ の値 $\rho(s)$ は 1 の冪根であり、特に $|\rho(s)| = 1$ を得る。各 $s \in G$ に対し $\rho(s) = 1$ とおくと、G のひとつの表現を得る。これは**単位表現**と呼ばれる。

$\rho : G \to GL(V)$ を線形表現とし、W を V の部分ベクトル空間とする。W は G の作用で**安定**（または**不変**、あるいは**保たれる**ともいう）とする。すなわち、$x \in W$ のとき、各 $s \in G$ に対して $\rho_s x \in W$ となるものとする。このとき ρ_s の W への制限 ρ_s^W は W からそれ自身の上への同型写像であり、明らかに $\rho_{st}^W = \rho_s^W \cdot \rho_t^W$ が成立する。従って、写像 $\rho{:}\, G \to GL(W)$ は G の W における線形表現である。W を V の**部分表現**という。

$\rho{:}G \to GL(v)$ を、G の線形表現とする。$V \neq 0$ で、V のどの部分ベクトル空間も G で保たれないとき（V と 0 を除いて）、ρ は**既約**または**単純**であるという。第二の条件は、V は二つの表現の直和でない（自明な分解 $V = 0 \oplus V$ を除いて）ということと同値である。任意の表現は、既約表現の直和である。

V_1, V_2 をふたつのベクトル空間とする。v_1 及び V_2 のテンソル積とは、ベクトル空間 W であって、次の二条件を満たす、$V_1 \times V_2$ から W への写像 $(x_1, x_2) \longmapsto x_1 \cdot x_2$ を持つものをいう。

(i) $x_1 \cdot x_2$ は変数 x_1, x_2 の各々に関して線形である。

(ii) (e_{i_1}) を V_1 のひとつの基底、$(\tilde{e_{i_2}})$ を V_2 のひとつの基底としたとき、積 $e_{i_1} \cdot \tilde{e_{i_2}}$ のなす族は W の基底である。

このような空間 W が存在して、ただ一つ（同型を除いて）であり、これを $V_1 \otimes V_2$ と表す。

今、$\rho^1 : G \to GL(V_1)$ 及び $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ をある群 G の二つの線形表現とする。$s \in G$ とし、$GL(V_1 \otimes V_2)$ の元 ρ_s を、条件

$$x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \text{に対して} \rho_s(x_1 \cdot x_2) = \rho^1_s(x_1) \cdot \rho^2_s(x_2)$$

により定義する。この ρ_s を

$$\rho_s = \rho^1_s \otimes \rho^2_s$$

と書く。ρ_s 達は G の $V_1 \otimes V_2$ における線形表現を定義し、これを与えられた表現の**テンソル積**と呼ぶ。

1.2　表現の指標

$\rho{:}G \to GL(V)$ を有限群 G の、ベクトル空間 V における線形表現とする。各 $s \in G$ に対して

$$\chi_\rho(s) = \mathrm{Tr}(\rho_s)$$

とおく。（$\mathrm{Tr}(\rho_s)$ は ρ_s の行列表示のトレースを表す。）このようにして得られた G 上の複素数値関数 χ_ρ を、表現 ρ の**指標**と呼ぶ。

$\rho{:}G \to GL(V)$ を、指標 χ の線形表現とし、V' を V の双対空間とする。$x \in V, x' \in V'$ のとき、線形形式 x' の x における値を $\langle x, x' \rangle$ により表す。$\rho'{:}G \to GL(V')$ を、$\langle x, \rho'_s x' \rangle = \langle \rho_s^{-1} x, x' \rangle$ により定めると、ρ' は

$$s \in G, x \in V, X' \in V' \text{に対し、} \langle \rho_s x, \rho'_s x' \rangle = \langle x, x' \rangle$$

を満たす線形表現であり、一意的である。これを ρ の**反傾表現**と呼び、その指標は χ^* である。

シューアの補題 $\rho^1{:}G \to GL(V_1)$ 及び $\rho^2{:}G \to GL(V_2)$ を G の二つの既約表現とする。f を、各 $s \in G$ に対し $\rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s$ を満たすような V_1 から V_2 への線形写像とする。このとき、

(1) ρ^1 と ρ^2 とが同型でなければ、$f = 0$ を得る。

(2) $V_1 = V_2, \rho^1 = \rho^2$ ならば、f は相似写像（すなわち恒等写像 1 のスカラー倍）である。

φ, ψ を G 上に二つの複素数値関数とするとき、

$$(\varphi|\psi) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\varphi(t)\psi(t)^*, g \text{ は } G \text{ の位数}$$

とおくと、これは一つの内積である。この内積を用いて指標について、既約表現の指標は一つの正規直交系をなすことが示される。更に、G 上の中心的関数全体のなすベクトル空間を H とすると、G の異なる既約表現の指標全体は H の正規直交基底をなす。

1.3 コンパクト群への拡張

位相群 G とは、位相をもつ群で、その位相に関して積 $s \cdot t$ 及び逆 s^{-1} が連続となるものをいう。このような群 G は、その位相がコンパクト空間の位相であるとき、**コンパクト群** と呼ばれる。例えば、直交群 $O(n)$、ユニタリ群 $U(n)$、コンパクトシンプレクティック群 $Sp(n)$、回転群 $SO(n)$、特殊ユニタリ群 $SU(n)$ はコンパクト群である。それらの閉部分群もまたコンパクト群である。

G をコンパクト群とし、V を複素数体上の有限次元ベクトル空間とするとき、G の V における線形表現とは、連続な準同型写像 $\rho{:}\, G \to GL(V)$ をいう。連続性の条件は、$\rho_s x$ が二変数 $s \in G, x \in V$ の連続関数であることと同値である。このような表現は、有限次元ユニタリ表現の直和に同型であることが証明されるので、考察を有限次元ユニタリ表現に限ってよいのである。

有限群の表現の性質の大部分は、コンパクト群の表現に拡張される。それらを示すために、有限の和をとる代わりに、Haar 測度 dt に関する積分をとることでおきかえればよい。

2 McKay 対応

G を特殊ユニタリ群 $SU(2)$ の閉部分群とする。G が有限群であると仮定する。ρ を自然表現、すなわち G から $GL(2, \mathbf{C})$ への埋め込み写像によって定まる 2 次元の表現とし、ρ_i を G の既約表現全体の集合で ρ_0 を単位表現とするものとし、さらに $\rho \otimes \rho_j$ の既約表現への分解を $\rho \otimes \rho_j = \sum n_{ij}\rho_j$ とする。このとき行列 (n_{ij}) を考えると、n_{ij} は $\rho \otimes \rho_j$ に含まれる ρ_j の回数であることから非負整数であり、d_i を ρ_i の次元とおくとき、$(d_1, d_2, \ldots)$ は行列 (n_{ij}) の固有ベクトルである。よって Perron–Frobenius の固有ベクトルであることから、行列 (n_{ij}) のノルムは 2 と分かる。

ρ_i を頂点で表し、行列 (n_{ij}) を、$n_{ij} = 1$ ならば頂点 ρ_i と頂点 ρ_j をつなぐという関係を表す行列とすると、これよりグラフ Γ が得られる。それを McKay グラフと呼ぶ。McKay 対応 [1] は、このような群の McKay グラフ Γ が、拡張された Dynkin 図形と一対一対応することを示している。行列 (n_{ij}) についての議論により、拡張された Dynkin 図形のうちこの対応で現れるのは A, D, E 型のみで、A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 の 5 種類である。それぞれのグラフに対応する群は、巡回群 C_n、$SO(3)$ の部分群とみなしたときの二面体群 D_n、4 次交代群 A_4、4 次対称群 S_4、5 次交代群 A_5 である。交代群や対称群は、正多面体の双対性を利用して見つけることができる。

次に G が有限とは限らないコンパクト群とする。このとき、G の既約表現 ρ_i は無限個存在する

ので、McKay グラフも無限個の頂点を持つものを考えることになる。G が有限群の場合と同様に、拡張された Dynkin 図形のうちこの対応で現れるのは A, D, E 型とわかるが、このうち、A, D 型は頂点が無限個のものを考える。すると、A 型は頂点が両側とも無限に続く場合と、片側だけ無限に続く場合の 2 通り考えられて、対応する群はそれぞ円周群 $U(1)$ と、特殊ユニタリ群 $SU(2)$ とわかる。D 型は片側だけ頂点が無限に続くグラフが考えられて、それに対応する群は、行列

$$V = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

と円周群 $U(1)$ の元によって生成される群である。よって G がコンパクト群のとき、G が有限群の場合に挙げられた群に追加してこれら 3 種類の群を考えられる。

参考文献

[1] J. McKay, Graphs, singularities, and finite groups, in *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979)*, 183–186, Proc. Sympos. Pure Math., 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI. MR0604577 (82e:20014)

[2] R. Steinberg, Finite subgroups of SU_2, Dynkin diagrams and affine Coxeter elements, Pacific J. Math. **118** (1985), no. 2, 587–598. MR0789195 (86g:20016)

[3] A. Wassermann, Ergodic actions of compact groups on operator algebras. III. Classification for SU(2), Invent. Math. **93** (1988), no. 2, 309–354. MR0948104 (91e:46093)