外場中のクライン－ゴルドン方程式の解の存在と伝播評価

神戸大学 D3 川本 昌紀 [(1)]

Abstract

私は，量子力学系に対する散乱理論について研究をしている．特に，空間に一様な電磁場が存在している場合における散乱理論を研究している．本講演では，光速近くで運動している荷電粒子が空間に一様な電場の影響を受けた物理モデルについて近年自身の研究で得られた結果について話させて頂く．

1 Introduction

まず荷電粒子が光速に比べ十分遅い場合を考える．この時，外場の影響がない場合では荷電粒子 $\phi(t,x)$ は次のシュレーディンガー方程式の初期値問題の解として振る舞う事が知られている．

$$\begin{cases} i\partial_t\phi(t,x) & = (p^2/(2m)\phi)(t,x) \\ \phi(0,x) & = \phi_0(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで，$t \in \mathbf{R}$ を時刻，$x \in \mathbf{R}^n$ を粒子の位置 $m > 0$ を粒子の質量とし，$p = -i\nabla_x = -i(\partial_1, ..., \partial_n)$ を粒子の運動量と呼ぶ．$p^2 = -\Delta$ (ラプラシアン) に注意する．量子力学系に支配される粒子は全空間での存在確率を 1 とする．すなわち，

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\phi(t,x)|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^n} |\phi_0(x)|^2 dx = 1$$

を必要とする．数学の用語で書き直せば,

$$\phi(t,x) \in L^2(\mathbf{R}^n_x), \quad \phi_0(x) \in L^2(\mathbf{R}^n_x)$$

である．時刻 t 粒子における粒子の位置の期待値を

$$x(t) = (x\phi(t,x), \phi(t,x))$$

で定義しよう．ここで，$(\cdot,\cdot)$ は L^2 内積であり，$\phi(t,x)$ は (1.1) の解とする．$\phi(t,x) = e^{-itp^2/(2m)}\phi_0$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} x'(t) := \frac{d}{dt}(x\phi(t,x), \phi(t,x)) &= \frac{d}{dt}(xe^{-itp^2/(2m)}\phi_0, e^{-itp^2/(2m)}\phi_0) \\ &= (i[p^2/(2m), x]e^{-itp^2/(2m)}\phi_0, e^{-itp^2/(2m)}\phi_0) \\ &= ((p/m)e^{-itp^2/(2m)}\phi_0, e^{-itp^2/(2m)}\phi_0) \end{aligned}$$

[(1)]mkawa@math.kobe-u.ac.jp

同様に，時刻 t における運動量の期待値を

$$p(t) = (p\phi(t,x), \phi(t,x))$$

とおけば,

$$p'(t) := \frac{d}{dt}(p\phi(t,x), \phi(t,x)) = 0$$

となる．よって,

$$x'(t) = p(t)/m, \quad p'(t) = 0, \quad mx'(0) = p(0) = (p\phi_0, \phi_0), \quad x(0) = (x\phi_0, \phi_0)$$

が分かる．これは，古典力学，すなわち，ニュートン方程式と一致する．これを解けば,

$$x(t) = tp(0)/m + x(0), \qquad \text{等速直線運動}$$

となり，$p(0)/m$ (初速度) が 0 でなければ，時間が経つごとに $x(t)$ が増大する事が分かる．実際，この事実を使えば以下の式が成り立つ：
任意の $\varepsilon_0 > 0$ に対して，$\phi_0 \in \mathscr{S}$ を $\mathrm{supp}\left\{\widehat{\phi_0}(\xi)\right\} = \{\xi \in \mathbf{R}^n \ : \ |\xi|/m > \varepsilon_0\}$ を満たす関数とする．ここで，$\widehat{\phi_0}$ は ϕ_0 のフーリエ変換である．この時,

$$\lim_{t\to\infty} \|F(|x| \le \varepsilon_0 t/2)\phi(t,x)\| = 0 \tag{1.2}$$

が成立する．ここで，$F(|x| \le a)$ とは，$|x| \le a$ の時 1 で，それ以外は 0 とする定義関数である．この式の意味は，初速度 ε_0 で発射された粒子の中で，時刻 t での速度 $(|x|/t)$ が $\varepsilon_0/2$ 以下になるようなものの存在確率は 0 に近づくという意味であり，物理的に当たり前の事実である．この (1.2) 式のように，粒子の時刻 t での散乱情報を示す評価を伝播評価と呼び，散乱理論では重要な評価式である.

次に，電場の影響を考慮に入れた系について考察しよう．$\mathbf{R}^n$ 空間に一様な定電場 $\mathbf{E} = (E_1, ..., E_n)$ が存在するとする．この時，荷電粒子が満たす Schrödinger 方程式は,

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi(t,x) &= (p^2/(2m) - qE\cdot x)\psi(t,x) \\ \psi(0,x) &= \psi_0 \end{aligned}$$

となる．ここで，$q \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ は荷電粒子の電荷であり，$E\cdot x = E_1x_1 + \cdots E_nx_n$ は通常のユークリッド内積とする．この時，同様にして，時刻 t における位置，運動量の期待値を

$$x(t) = (x\psi(t,x), \psi(t,x)), \quad p(t) = (p\psi(t,x), \psi(t,x))$$

とおく．また，$H^S = p^2/(2m) - qE\cdot x$ の自己共役性を使えば，$\psi(t,x) = e^{-itH^S}\psi_0$ と書ける事に注意すると

$$\begin{aligned} x'(t) &= (i[H^S, x]e^{-itH^S}\psi_0, e^{-itH^S}\psi_0) = ((p/m)\psi(t,x), \psi(t,x)) \\ p'(t) &= (i[H^S, p]e^{-itH^S}\psi_0, e^{-itH^S}\psi_0) = ((qE)\psi(t,x), \psi(t,x)) \end{aligned}$$

となる．よって，

$$x(t) = t^2((qE/m)\psi_0, \psi_0) + tp(0)/m + x(0), \qquad \text{等加速度運動}$$

となり，電場の影響により早く散乱する事が示唆される．実際，$|E| = E_0$ とおけば，任意の $\psi_0 \in \mathscr{S}$ に対して，次の伝播評価が成立する：

$$\lim_{t\to\infty} \left\| F(|x|/t^2 \le |qE_0|/(2m))\psi(t,x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} = 0$$

伝播評価が初期運動量 p_0 に依らない事から，電場方向へ強制散乱される事が分かる．
ここで見るように，電場は散乱を考える際には強い影響力を持つ．例えば $H = -\Delta + V$ が負の固有値を持っていても，電場を印加すると固有値が消滅する事などが知られている．

2　相対論的な系

次に粒子が光速に近い速度で運動する系について考察する．この場合，外場の影響力が働かなければ，粒子は次のクライン−ゴルドン方程式の解として振る舞う事が知られている．

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\partial_t)^2\phi(t,x) = (c^2p^2 + (mc^2)^2)\phi(t,x) =: L\phi(t,x) \\ \phi(0,x) = \phi_0, \quad (i\partial_t\phi)(0,x) = \phi_1 \end{array} \right. , \tag{2.1}$$

ここで，$m \ge 0$ は粒子の質量であり，$c > 0$ は光速としている．注意すべきは，この方程式は光子のような粒子の運動も記述できる．その際は $m = 0$ であり，今の場合は波動方程式と一致する．量子力学系の散乱理論を考察するにはエネルギーの考察が課題となる．この場合，まず，

$$\Phi(t,x) = \begin{pmatrix} \phi(t,x) \\ i\partial_t\phi(t,x) \end{pmatrix}$$

とおく．ここで，$\phi(t,x)$ は (2.1) の解とする．すると，$\Phi(t,x)$ は次のシュレーディンガー型の方程式を満たす．

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 0 \end{pmatrix}\Phi(t,x), \quad \Phi(0,x) = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$

ここで問題となるのは，上式，右辺の行列

$$H_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 0 \end{pmatrix}$$

が $L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$ 上の対称行列とならない事である．そこでエネルギー空間 (クライン空間) を次の内積を備えたヒルベルト空間で定義しよう:
任意の $\Phi, \Psi \in H^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$(\Phi, \Psi)_{\mathscr{K}} = \left(\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi, \Psi \right)_{L^2(\mathbf{R}^n)\oplus L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

この時，H_0 はクライン空間 $\mathscr{K}$ 上，対称作用素となり，さらに自己共役作用素となる．この時，ストーンの公式から，強連続ユニタリー群 e^{-itH_0} がただ一つ存在して， $\Phi(t,x) = e^{-itH_0}\Phi_0$ となる．また，簡単な計算からユニタリー群 e^{-itH_0} は次の表現を持つ．

$$e^{-itH_0} = \begin{pmatrix} \cos(tQ) & \sin(tQ)/Q \\ -iQ\sin(tQ) & i\cos(tQ) \end{pmatrix},$$
$$(e^{-itH_0})^{-1} =: (e^{-itH_0})^{*\mathscr{K}} = \begin{pmatrix} \cos(tQ) & i\sin(tQ)/Q \\ Q\sin(tQ) & -i\cos(tQ) \end{pmatrix}$$

ここで，$Q = L^{1/2}$ である．この時，次のエネルギー保存則が成立する．

$$\left\|e^{-itH_0}\Phi_0\right\|_{\mathscr{K}} = \|\Phi_0\|_{\mathscr{K}}$$

成分で書けば，

$$\int |(\nabla\phi)(t,x)|^2dx + \int |(i\partial_t\phi)(t,x)|^2dx = \int |(\nabla\phi_0)(x)|^2dx + \int |(\phi_1)(x)|^2dx$$

となる．この系における伝播評価を見よう．この系の散乱理論には多くの研究があり，様々な手法が用いられてきている．ここでは，Gérard [Ge] が用いた手法を紹介する．これは，シュレーディンガー方程式の解析で扱われた手法のクライン－ゴルドン版であると思ってくれてよい．

Lemma 2.1. 任意の $\varepsilon_0 > 0$ に対して，$\varphi \in C_0^\infty((\varepsilon_0,\infty))$ とする．この時，ある $0 < \widetilde{\varepsilon}_0$ が存在して，

$$\left(xe^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0, e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0\right)_{\mathscr{K}} \geq (x\varphi(H_0)\Phi_0, \varphi(H_0)\Phi_0)_{\mathscr{K}} + t\widetilde{\varepsilon}_0\|\varphi(H_0)\Phi_0\|^2_{\mathscr{K}}$$

が成立する．

Remark 2.2. (初期速度)^2 $\sim$ (初期エネルギー) と思えば $\varphi(H_0)\Phi_0$ とは初期速度が 0 でない初期値の空間への写像と思える．

証明はシュレーディンガーの場合のように簡単には出来ない．概略を述べれば，

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} L^{1/2} & 1 \\ L^{1/2} & -1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{H}_0 = \begin{pmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & -L^{1/2} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\mathcal{J}H_0 = \widehat{H}_0\mathcal{J}, \quad (\Phi,\Psi)_{\mathscr{K}} = (\mathscr{J}\Phi, \mathscr{J}\Psi)_{L^2(\mathbf{R}^n)\oplus L^2(\mathbf{R}^n)}$$

となる．この事に注意すれば，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(xe^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0, e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0\right)_{\mathscr{K}} \\
&= \left(\widetilde{\varphi}(\widehat{H}_0)\begin{pmatrix} c^2pL^{-1/2} & \\ 0 & -c^2pL^{-1/2} \end{pmatrix}\widetilde{\varphi}(\widehat{H}_0)\mathscr{J}e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0, \mathscr{J}e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0\right)_{\mathscr{H}} \\
&\geq \widetilde{\varepsilon}_0\left(\mathscr{J}e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0, \mathscr{J}e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0\right)_{\mathscr{H}} = \widetilde{\varepsilon}_0\left(e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0, e^{-itH_0}\varphi(H_0)\Phi_0\right)_{\mathscr{K}}
\end{aligned}$$

ここで，$\tilde{\varphi}\varphi = \varphi$, $\mathscr{H} = L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$ である． この命題がクラインーゴルドン版の伝播評価である．この手法は，右辺の評価を $\mathscr{H}$ 空間での評価にしたため，ポテンシャルの相対的有界性，コンパクト性を用いた解析手法などが扱え，ムール理論を用いることが出来るため非常に有用な解析手法である事が分かる．
さて，今，考察している粒子が他の動かない粒子 (他の粒子を静止系とみなす) と十分に近い時，相互作用によりエネルギーが生じる．このエネルギーが粒子の初期エネルギーよりも十分に大きいとき，粒子はエネルギーの壁から脱出できず，他の粒子の近傍に留まり続ける．これを束縛されるという事にする．一方，粒子の初期エネルギーが十分に大きい場合，ポテンシャルの壁を越える．その後，粒子自体は等速直線運動を行うので，他の粒子から十分遠方に飛んでいく事が予想される．この予想を数学的に見るには，波動作用素と呼ばれる作用素を定義し，その存在を示す事と，その完全性 (ユニタリー性) を証明する．これらの研究を散乱理論と呼んでいる．シュレーディンガー，クラインーゴルドン，ディラック方程式など，量子力学で現れる方程式に対する散乱理論は 20 世紀の後半から研究されており，多くの研究結果がある．
一方でクラインーゴルドン方程式に対する散乱理論については次のような問題が度々現れる：
他の粒子との相互作用を $q_V(x)$ とおく，この時のクラインーゴルドン方程式は，以下で与えられる:

$$\begin{cases} (i\partial_t + q_V)^2\varphi(t,x) = L\varphi(t,x) \\ \varphi(0,x) = \varphi_0, \quad (i\partial_t\varphi)(0,x) = \varphi_1 \end{cases}$$

この場合におけるエネルギー空間 $\mathscr{H}_V$ は以下の内積を備えたヒルベルト空間となる:

$$(\Phi, \Psi)_{\mathscr{H}_V} = \left(\begin{pmatrix} L - q_V^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi, \Psi \right)_{L^2(\mathbf{R}^2) \oplus L^2(\mathbf{R}^2)}$$

この空間がヒルベルトであるためには条件,

$$\int \left(|(\nabla\varphi_0)(x)|^2 + |(i\partial_t\varphi_1)(x)|^2 \right) dx - \int |q_V\varphi_0(x)|^2 dx > 0$$

が必要となる．q_V が十分に大きいとき，このエネルギーノルムは負になる．エネルギーが負になってしまう現象をクライン・パラドックスと呼ぶことにすると，このクライン・パラドックスが起こる場合における散乱理論の考察は現状としてまったくの手つかずであると言ってよいと思われる．Gérard [Ge] は近年の長距離型と呼ばれるポテンシャルに対しての散乱理論を考察したが，この際は $m > 0$, $mc^2 \gg 1$ という仮定をもってこの困難を回避した．またその論文では，クライン・パラドックスが起こりうる系に対しては，Open Problem としている．

3　電場中のクラインーゴルドン方程式

クライン・パラドックスが起こる系の中で，重要な物理モデルが幾つかある．その多くが一様な外場問題である．さて，その問題の中で，私は特に電場問題について近年考察して

いる．時間に依存した空間一様な電場を $E(t)$ と書けば，この影響下でのクラインーゴルドン方程式は，

$$\begin{cases} (i\partial_t + qE(t)\cdot x)^2\phi_E(t,x) = L\phi_E(t,x) \\ \phi_E(0,x) = \phi_{E,0}, \quad (i\partial_t + qE(t)\cdot x)\phi_E(t,x)\big|_{t=0} = \phi_{E,1} \end{cases}$$

である．この研究における先行研究は Veselić [Ve] などがある．さて，この問題に対する系を考察しよう．

$$\Phi_E(t,x) = \begin{pmatrix} \phi_E(t,x) \\ (i\partial_t + qE(t)\cdot x)\phi_E(t,x) \end{pmatrix}$$

とおけば，系は，

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_E(t,x) = \begin{pmatrix} -qE(t)\cdot x & 1 \\ L & -qE(t)\cdot x \end{pmatrix}\Phi_E(t,x), \quad \Phi_E(0,x) = \Phi_{E,0} = \begin{pmatrix} \phi_{E,0} \\ \phi_{E,1} \end{pmatrix}$$

となる．$E(t) \equiv E$ (定電場) におけるこの系のエネルギー空間のノルムは，

$$\int \left(|\nabla\phi_{E,0}(x)|^2 + |\phi_{E,1}(x)|^2\right) - (qE\cdot x)\left(\phi_{E,0}(x)\overline{\phi_{E,1}}(x) + \overline{\phi_{E,0}}(x)\phi_{E,1}(x)\right)dx$$

となり，ノルムの正値性はほぼ成立しない．この問題に対して少し変わった視点からエネルギー空間を定めた論文がある．これは，[ACJ] であり，大変興味深い．
さて，エネルギー空間と自己共役性の理論を扱わず解を構成する．まず $b(t) = \int_0^t qE(s)ds$ とおき，$\phi_E(t,x) = e^{ib(t)\cdot x}\psi_E(t,x)$ とおく．この時，$\psi_E(t,x)$ は以下の初期値問題の解となる．

$$\begin{cases} -(\partial_t)^2\psi_E(t,x) = (c^2(p+b(t))^2 + (mc^2)^2)\psi_E(t,x) =: \widehat{L}(t)\psi_E(t,x) \\ \psi_E(0,x) = \psi_{E,0} = \phi_{E,0}, \quad (\partial_t\psi_E)(0,x) = \psi_{E,1} = i(qE(0)\cdot x)\phi_{E,0} + \phi_{E,1} \end{cases}$$

この変換により常微分方程式の理論を用いて解を構成，評価する．$\zeta_0(t,p)$, $\zeta_1(t,p)$ を

$$\zeta_j''(t,p) + \widehat{L}(t)\zeta_j(t,p) = 0,\ j\in\{0,1\}, \quad \begin{cases}\zeta_0(0,p) & = \mathrm{Id} \\ \zeta_0'(0,p) & = 0\end{cases}, \quad \begin{cases}\zeta_1(0,p) & = 0 \\ \zeta_1'(0,p) & = \mathrm{Id}\end{cases}$$

を満たす作用素とする．この時，

$$\psi_E(t,x) = \zeta_0(t,p)\psi_{E,0} + \zeta_1(t,p)\psi_{E,1}$$

となる．さて，電場 $E(t)$ の仮定を述べよう．そのためにまず，集合 $P_0 \subset \{1,2,....,n\}$ に対して，$j\in P_0$ を次で定義する．
$j\in P_0$ ならば，

$$E_j(t)\int_0^t E_j(s)ds \geq \widetilde{E}_j t^{\gamma_j} + \eta_j(t)t^{\gamma_{0,j}} \tag{3.1}$$

を満たすような，$\gamma_j > 0$, $\gamma_j \geq \gamma_{0,j}$, $\widetilde{E}_j > 0$, $\sup_t|\eta_j(t)| < \widetilde{E}_j$ が存在する．この時，電場の仮定 (E1) を次とする：

(E1) $P_0 \neq 0$

Remark 3.1. 仮定 (E1) は $n=1$ の場合には次のような電場などを含んでいる．

$$E(t)=E, \quad E(t)=t^{-\rho}E, \quad E(t)=E\sin^2(t), \quad E\neq 0,\ 0<\rho<1$$

この時，以下の定理が成立する．

Theorem 3.2. (E1) を仮定し，$\gamma>0$ を $\gamma\leq(\max_{j\in P_0}\gamma_j)/4$ を満たすある実数とする．この時，任意の $\phi\in\mathscr{S}$, $\widehat{\phi}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$\|\zeta_j(t,p)\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\leq C(\widehat{\phi})t^{-\gamma}\|\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \quad j\in\{0,1\}$$

が成立する．ここで，$C(\widehat{\phi})$ は $\widehat{\phi}$ のサポートに依った定数である．

Remark 3.3. 電場の影響により，L^2- 解自体が減衰してしまう事を意味している．この現象とクライン・パラドックスとの因果関係については現在のところ (私は) よく分からないが何らかの関連性があると予想している．

この解を用いて時間発展作用素 $U_0(t)$ を次で定義しよう．

$$U_0(t)=\begin{pmatrix} e^{ib(t)\cdot x} & 0 \\ 0 & e^{ib(t)\cdot x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_0(t) & \zeta_1(t) \\ i\zeta_0'(t) & i\zeta_1'(t)\end{pmatrix},$$

$$U_0^{-1}(t)=\begin{pmatrix}\zeta_1'(t) & i\zeta_1(t) \\ -\zeta_0'(t) & -i\zeta_0(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-ib(t)\cdot x} & 0 \\ 0 & e^{-ib(t)\cdot x}\end{pmatrix}$$

ここで，$\zeta_0\zeta_1'-\zeta_0'\zeta_1=1$ に注意する．この時，

$$i\frac{\partial}{\partial_t}U_0(t)=\begin{pmatrix}-qE(t)\cdot x & 1 \\ L & -qE(t)\cdot x\end{pmatrix}U_0(t)$$

が成立する．この手法を用いて摂動項付きのクラインーゴルドン方程式,

$$i\frac{\partial}{\partial_t}U(t)=\begin{pmatrix}-qE(t)\cdot x & 1 \\ L-q_V^2 & -qE(t)\cdot x+2qV\end{pmatrix}U(t)$$

の解の存在も同様に示す事ができる．

私は近年，この結果に加えて，自由解の L^p-L^q 評価，波動作用素の構成法について考察した．本講演では，自由解の具体的な求め方や評価法の計算についてお話したい．また時間があれば伝播評価の導出についてもお話したい．

References

[ACJ] Arredondo, R., Cruz, M., Juan, H.: Scattering theory for the Klein-Gordon equation with nondecreasing potentials. J.M.P, **49**, (2008).

[Ge] Gérard, C.: Scattering Theory for Klein-Gordon Equations with Non-Positive Energy. Ann. Henri. Poincaré, **13** 883-941 (2012).

[Ve] Veselić, K.: A Spectral Theory of the Klein-Gordon Equation Involving a Homogeneous Electric Field. J. Operator. Theory, **25**, 319-330 (1991).