フロベニウス拡大と
アウスランダー・ゴーレンスタイン環

亀山 統胤　(信州大学大学院 総合工学系研究科)*

1. 導入

擬フロベニウス局所環や可換ゴーレンスタイン局所環などの環は幅広く研究されている (e.g. [3], [8]). 本研究は, そういった環のクラスを含むアウスランダー・ゴーレンスタイン局所環の構成を目的とするものである.

例えば

1. A型の正則 3次元多元環,
2. 標数0の体上のワイル多元環,
3. 有限次元リー代数の包絡多元環,
4. Sklyanin多元環

等がアウスランダー・ゴーレンスタイン環であることが知られている ([2], [4], [5], [11]).

本講演ではフロベニウス拡大の概念を使うことにより任意のアウスランダー・ゴーレンスタイン局所環 R から体系的に別なアウスランダー・ゴーレンスタイン局所環 A を作り出すことについて話をする.

2. 準備

まず初めに移入加群, 平坦加群の定義をし, それらを使いアウスランダー・ゴーレンスタイン環の定義をする.

定義 2.1. Rを環とする. R-加群 Iが**移入加群** (injective module) とは, 任意の単射準同型 $X \overset{\alpha}{\to} Y$ に対して, 次が全射になることである:

$$\mathrm{Hom}_R(Y,I) \overset{\mathrm{Hom}(\alpha,I)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_R(X,I)$$

定義 2.2. Rを環とする. 右R-加群 Mが**平坦加群** (flat module) とは, 左R-加群の任意の完全列 $0 \to X \overset{\alpha}{\to} Y$ に対して, 次が完全列になることである:

$$0 \to M \otimes_R X \overset{M\otimes\alpha}{\to} M \otimes_R Y$$

定義 2.3. R-加群 M について, 各項 F_i が平坦加群である次のような完全列

$$0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

が存在するとき, これを長さ n の**平坦分解**という. このとき M の**平坦次元** (flat dimension) は n 以下であるといって, flat dim $M \leq n$ と表す. さらに, n が flat dim $M \leq n$ と

本研究は, (一財) 長野県科学振興会の助成を受け実施したものです.
* 〒390-8621 長野県松本市旭 3-1-1 信州大学大学院 総合工学系研究科
e-mail: kameyama@math.shinshu-u.ac.jp

なる最小の整数であるとき, M の平坦次元はnであるといい, flat dim $M = n$で表す. また, 長さが有限の平坦分解が存在しない場合には, flat dim $M = \infty$ と定める. 同様に, 任意のR-加群 X について, 各I_i が移入加群である次の完全列

$$0 \to X \xrightarrow{\lambda_0} I_0 \xrightarrow{\lambda_1} I_1 \to \cdots \xrightarrow{\lambda_n} I_n \to 0$$

を**移入分解**と呼び, **移入次元** (injective dimension) が定義される. また, 各$\lambda_i(E_{i-1}) \hookrightarrow E_i$ が移入包絡と呼ばれる特別な準同型のとき, これを **極小移入分解**と呼ぶ.

定義 2.4 (Björk)**.** R を左かつ右ネーター環, $n \geq 0$, $I^\bullet$: R の極小移入分解とする. このとき

R が **アウスランダー条件を満たす** $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ flat dim $I^i \leq i$ (任意の $0 \leq i \leq n$).

R が **アウスランダー・ゴーレンステイン環** $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ ·inj dim $R =$ inj dim $R^{\mathrm{op}} < \infty$,

·R はアウスランダー条件を満たす.

中山・都筑 [9, 10] によるフロベニウス拡大の概念を, 我々の研究の場合に置き換えて定義する.

定義 2.5. A, R: 環に対し,

A は R の拡大環 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ A は R を部分環として含む (A/R と書くことにする).

$$\begin{aligned} A/R: \text{フロベニウス拡大}: \overset{def}{\Longleftrightarrow}\ & (F1) A: \text{有限生成左}\, R - \text{加群}; \\ & (F2) A: \text{有限生成射影右}\, R - \text{加群}; \\ & (F3) A \cong \mathrm{Hom}_R(A, R) (\text{右}\, A - \text{加群として}). \end{aligned}$$

命題 2.6. 任意のフロベニウス拡大 Λ/A, A/R に対して Λ/R もフロベニウス拡大である.

命題 2.7 (cf. [1])**.** フロベニウス拡大 A/R に対して次が成り立つ.

R: アウスランダー・ゴーレンステイン環

$\Rightarrow$ *A:* アウスランダー・ゴーレンステイン環 かつ inj dim $A \leq$ inj dim R.

定義 2.8. 本講演を通して,

$n \geq 2$, $G = \{0, 1, \ldots, n-1\}$: 集合に対して

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

をGの巡回置換とする.

注意 2.9. $G \times G \to G, (i, j) \mapsto \pi^j(i)$ とすれば G は巡回群 (単位元は0) となる.

では, 実際にアウスランダー・ゴーレンステイン局所環の構成についてみていく.

(q, χ): 下記の (X1), (X2) を満たす二つ組

q: 整数

$\chi: G \to \mathbb{Z}$: 写像

をとる.

(X1) $q - \chi(n-j+i) \leq \chi(j) - \chi(i) \leq \chi(j-i)$ ($i < j$ である任意の $i, j \in G$);

(X2) $\chi(i) + \chi(n-i-1) = \chi(n-1)$ (任意の $i \in G$).

注意 2.10. $q \leq n$ かつ $\chi(i) = i$ (任意の $i \in G$) とすれば (X1), (X2) を満たす.

任意の $i, j \in G$ に対して次のように置く

$$\omega(i,j) = \begin{cases} \chi(i) + \chi(j) - \chi(\pi^j(i)) & (i + j < n), \\ \chi(i) + \chi(j) - \chi(\pi^j(i)) - q & (i + j \geq n) \end{cases}$$

補題 2.11. 次が成り立つ.

(1) $\omega(i,j) \geq 0$ *(*任意の $i, j \in G$*).*

(2) $\omega(0,i) = \omega(i,0) = \chi(0) = 0$ *(*任意の $i \in G$*).*

(3) $\omega(i, n-i-1) = 0$ *(*任意の $i \in G$*).*

R を環とし, 条件 (*) を満たす三つ組み $(\sigma; c, t)$ ($\sigma \in \mathrm{Aut}(R)$ であり $c, t \in R$) を持つものとする:

$$(*) \quad c, t \in R^{\sigma} \quad \text{かつ} \quad xc = c\sigma(x), \ \ xt = t\sigma^q(x) \ (\text{任意の } x \in R).$$

注意 2.12. 条件 (*) は以下のような場合に成り立つ:

1. $\sigma = \mathrm{id}_R$ かつ $c, t \in \mathrm{Z}(R)$ ($\mathrm{Z}(R)$: 環 R の中心),
2. 任意の σ と $c = t = 0$.

上の環 R から具体的に環 A を構成する.

定義 2.13. A: 自由右 R-加群とし, その基底を $\{e_i\}_{i \in G}$ とする.

A 上の積を以下のように定義する:

(M1) $e_i e_j = e_{\pi^j(i)} c^{\omega(i,j)}$ $(i + j < n)$

$e_i e_j = e_{\pi^j(i)} t c^{\omega(i,j)}$ $(i + j \geq n)$;

(M2) $x e_i = e_i \sigma^{\chi(i)}(x)$ (任意の $x \in R$, 任意の $i \in G$).

3. 主定理

命題 3.1. 次が成り立つ.

(1) A *は結合的な環であり, 単位元は* $1_A = e_0$ *である.*

(2) A *は* R *の拡大環になる. (単射環準同型* $R \to A, x \mapsto e_0 x$ *を通して)*

(3) A/R *はフロベニウス拡大である.*

命題 3.2. $t \in \mathrm{rad}(R)$ *とする. このとき* $R/\mathrm{rad}(R) \xrightarrow{\sim} A/\mathrm{rad}(A)$ *が成り立つ.*
($\mathrm{rad}(R)$*: 環* R *のジャコブソン根基)*

以上のことを使うことにより, 以下の主結果を得ることが出来た.

定理 3.3. $t \in \mathrm{rad}(R)$ *とする.*
このとき,

A*: アウスランダー・ゴーレンステイン局所環*

$\iff$ R*: アウスランダー・ゴーレンステイン局所環* かつ $\mathrm{inj\ dim}\ R = \mathrm{inj\ dim}\ A$.

また, 計算により

$$t \in \mathrm{rad}(R) \iff c \in \mathrm{rad}(R) \text{かつ} \omega(i, n-i) > 0 (\text{任意の } i \neq 0).$$

が成り立つこともわかった.
よって, 上の定理は次のように言い換えられる.

定理 3.4. 次を仮定する

1. $c \in \mathrm{rad}(R)$,

2. $n\chi(i) > iq$ (任意の $i \neq 0$).

このとき以下が成り立つ;
A: アウスランダー・ゴーレンスタイン局所環
$\iff$ *R:* アウスランダー・ゴーレンスタイン局所環 かつ inj dim $R =$ inj dim A.

講演では, 実際に環 R から新しい環 A を作った例を紹介するつもりである.
尚, 本講演は筑波大学・星野光男氏, 東京電機大学・古賀寛尚氏との共同研究 [7] に基づくものである.

参考文献

[1] H. Abe and M. Hoshino, Frobenius extensions and tilting complexes, Algebras and Representation Theory **11**(3) (2008), 215–232.

[2] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, Modules over regular algebras of dimension 3, Invent. Math. **106** (1991), no. 2, 335–388.

[3] Y. Baba and K. Oshiro, *Classical Artinian rings and related topics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2009.

[4] J. -E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland Mathematical Library, **21**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.

[5] J. -E. Björk, The Auslander condition on noetherian rings, in: *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin, 39ème Année (Paris, 1987/1988)*, 137-173, Lecture Notes in Math., **1404**, Springer, Berlin, 1989.

[6] M. Hoshino and H. Koga, Auslander-Gorenstein resolution, J. Pure Appl. Algebra **216** (2012), no. 1, 130–139.

[7] M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga, Constructions of Auslander-Gorenstein local rings as Frobenius extensions, preprint.

[8] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Translated from the Japanese by M. Reid, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[9] T. Nakayama and T. Tsuzuku, On Frobenius extensions I, Nagoya Math. J. **17** (1960), 89–110.

[10] T. Nakayama and T. Tsuzuku, On Frobenius extensions II, Nagoya Math. J. **19** (1961), 127–148.

[11] J. Tate and M. Van den Bergh, Homological properties of Sklyanin algebras, Invent. Math. **124** (1996), no. 1-3, 619–647.