

自由境界の外力項付き曲率流方程式に対する 解の挙動と最大存在時刻

可香谷隆 (北海道大学)

1 Introduction

平均曲率流方程式は界面の動きを記述するモデルの一つとして知られ、例えば金属の焼き鈍しなどに応用されている [3]. 平均曲率流方程式は以下のようなモデルである. まず, $\Gamma(t)$ を時刻 t における \mathbb{R}^n 内の向き付け可能で滑らかな超曲面とする. このとき, $\Gamma(t)$ の各点に対して法線方向に対する動く速さ V と平均曲率 H が定義でき, 平均曲率流方程式は $V = H$ と記述される. $\Gamma(t)$ が閉曲面の場合には, 例えば [5, 6] などによって解析されている. また, 定数 C を用いた外力項付き平均曲率流 $V = H + C$ は超電動理論などに応用されている [2].

本研究では以下の自由境界の外力項付き曲率流方程式を考察する.

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2} + C\sqrt{1+u_x^2}, & -\xi_1(t) < x < \xi_2(t), t > 0, \\ u_x(-\xi_1(t), t) = \tan \alpha_1, & t > 0, \\ u(-\xi_1(t), t) = \xi_1(t) \tan \beta_1, & t > 0, \\ u_x(\xi_2(t), t) = \tan \alpha_2, & t > 0, \\ u(\xi_2(t), t) = \xi_2(t) \tan \beta_2, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\xi_{01} \leq x \leq \xi_{02}, \\ \xi_1(0) = \xi_{01}, \quad \xi_2(0) = \xi_{02}, \end{cases} \quad (1)$$

ただし,

$$\begin{cases} \beta_i \in (0, \frac{\pi}{2}) (i = 1, 2), \quad \alpha_1 \in (-\beta_1, \frac{\pi}{2}), \quad \alpha_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \beta_2), \\ C \neq 0 \text{ is a constant, } \quad \xi_{01}, \xi_{02} > 0, \\ u_0 \in C^{1+\alpha}([-\xi_{01}, \xi_{02}]), \quad (u_0)_x(-\xi_{01}) = \tan \alpha_1, \quad (u_0)_x(\xi_{02}) = \tan \alpha_2, \\ u_0(-\xi_{01}) = \xi_{01} \tan \beta_1, \quad u_0(\xi_{02}) = \xi_{02} \tan \beta_2. \end{cases}$$

この方程式は $u(x, t), \xi_1(t), \xi_2(t)$ が未知関数となっている. 本研究においては $\Gamma(t) = \{(x, u(x, t)); -\xi_1(t) \leq x \leq \xi_2(t)\}$ と表記できる. この表記を用いると

$$V = \frac{u_t}{\sqrt{1+u_x^2}}: \text{速さ}, \quad H = \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}: \text{曲率}.$$

が得られ, 以下が成り立つ.

$$V = H + C \iff u_t = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2} + C\sqrt{1+u_x^2}.$$

$C = 0$ の場合の (1) の解の局所存在性は, [1] を応用することによって得られる. ここで, 方程式 (1) の解 (u, ξ_1, ξ_2) に対して以下を定義する.

$$D(t) := \int_{-\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} u(x, t) dx - \frac{1}{2}(\xi_1^2(t) \tan \beta_1 + \xi_2^2(t) \tan \beta_2),$$

$$L(t) := \int_{-\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} \sqrt{1+u_x^2} dx.$$

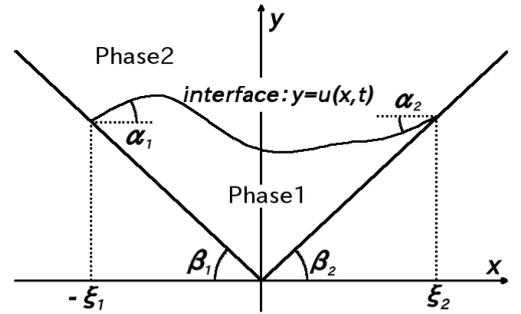


Figure 1: 時刻 t における u のグラフ

$D(t)$ は時刻 t における図 1 の Phase1 の面積を表し, $L(t)$ は時刻 t における u のグラフの長さを表す. また, この $D(t)$ に対して,

$$\frac{d}{dt}D(t) = \alpha_2 - \alpha_1 + CL(t) \quad (2)$$

が成り立つ. これにより, $C = 0$ の場合には α_1, α_2 の値のみに依存して解の挙動が変わることが予測され, 実際に以下の結果が知られている.

- (I) $\alpha_2 > \alpha_1$ のとき, 時刻 $t \rightarrow \infty$ で ξ_1, ξ_2 は発散, u は一様に発散し, 解は前向き自己相似解に漸近する [1].
- (II) $\alpha_2 = \alpha_1$ のとき, 時刻 $t \rightarrow \infty$ で u は定常解に収束する [4].
- (III) $\alpha_2 < \alpha_1$ のとき, ある有限時刻 $T > 0$ が存在し, 時刻 $t \rightarrow T$ で $u(0, \cdot), \xi_1, \xi_2$ は 0 に収束し, 解を後ろ向き自己相似解のオーダーでスケール変換したものが定常解に収束する [4].

2 Self-similar solutions

$C \neq 0$ の場合, 方程式 (1) に対する自己相似解は存在しないため, 外力項がない場合と曲率項がない場合の自己相似解について考察する. $C = 0$ の場合, 方程式 (1) に対する時刻 $t \rightarrow T$ で原点に収縮する後ろ向き自己相似解は

$$u(x, t) = \sqrt{2(T-t)}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{2(T-t)}}\right), \quad \xi_i(t) = \sqrt{2(T-t)}q_i \quad (i = 1, 2)$$

と書き表せ, $\phi(y), q_1, q_2$ は以下を満たす.

$$\begin{aligned} \frac{\phi''}{1 + (\phi')^2} - y\phi' + \phi &= 0, \quad -q_1 < y < q_2, \quad q_1, q_2 > 0 \\ \phi'(\mp q_i) &= \tan \alpha_i, \quad \phi(\mp q_i) = q_i \tan \beta_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

また, 曲率項がない方程式

$$\begin{cases} u_t = C\sqrt{1+u_x^2}, & -\xi_1(t) < x < \xi_2(t), \quad t > 0, \\ u_x(\mp \xi_i(t), t) = \tan \alpha_i, & t > 0, \quad i = 1, 2, \\ u(\mp \xi_i(t), t) = \xi_i(t) \tan \beta_i, & t > 0, \quad i = 1, 2, \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\xi_{01} \leq x \leq \xi_{02}, \\ \xi_1(0) = \xi_{01}, \quad \xi_2(0) = \xi_{02} \end{cases}$$

に対する時刻 $t \rightarrow \infty$ で発散する前向き自己相似解は

$$u(x, t) = (t+1)\psi\left(\frac{x}{t+1}\right), \quad \xi_i(t) = (t+1)r_i \quad (i = 1, 2)$$

と書き表せ, $\psi(y), r_1, r_2$ は以下を満たす.

$$\begin{aligned} C\sqrt{1+(\psi')^2} + y\psi' - \psi &= 0, \quad -r_1 < y < r_2, \quad r_1, r_2 > 0 \\ \psi'(\mp r_i) &= \tan \alpha_i, \quad \psi(\mp r_i) = \tan \beta_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

3 Main results

まず, 解析的半群を用いて以下の解の局所存在性定理を得た.

Theorem 3.1. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha, \xi_{01}, \xi_{02}, u_0$ に依存した時刻 $T > 0$ が存在して, 方程式 (1) は解

$$\begin{aligned} u &\in C^{1,0}(Q_1) \cap C^{2,1}(Q_2), \\ \xi_i &\in C[0, T] \cap C^1(0, T] \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

を持つ. ただし, $Q_1 = \{(x, t); -\xi_1(t) \leq x \leq \xi_2(t), t \in [0, T]\}$, $Q_2 = \{(x, t); -\xi_1(t) \leq x \leq \xi_2(t), t \in (0, T]\}$.

Theorem 3.1 より以下のいずれかを満たす時刻 T^* まで解の存在性が保証される.

(I) $\xi_1(t) + \xi_2(t) \rightarrow 0$ or ∞ as $t \rightarrow T_*$.

(II) $\|u(\cdot, t)\|_{C^{1+\alpha}} \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow T_*$.

以降 $\alpha_1 + \beta_1, \beta_2 - \alpha_2 \leq \pi/2$ 又は u_0 が凸関数を仮定する. このとき, $0 < \xi_1(t) + \xi_2(t) < \infty$ が成り立っている限り, $\|u(\cdot, t)\|_{C^{1+\alpha}} < \infty$ が得られる. この事実を用いると, 以下の挙動分類, 漸近挙動, 解の最大時刻に関する定理が得られる.

Theorem 3.2. $C > 0, \alpha_1 \leq \alpha_2$ のとき, (u, ξ_1, ξ_2) は大域解であり, $t \rightarrow \infty$ とすると $\xi_i(t) \rightarrow \infty, u(x, t) \rightarrow \infty$ (uniformly) が成り立つ. さらに, $\alpha_2 = \alpha_1$ のとき $t \rightarrow \infty$ とすると $(\frac{1}{t}u(ty, t), \xi_1/t, \xi_2/t) \rightarrow (\psi(y), q_1, q_2)$ が成り立つ.

Theorem 3.3. $C > 0, \alpha_1 > \alpha_2$ かつ

$$D(0) > \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\pi - \beta_1 - \beta_2)}{2C^2}$$

のとき, (u, ξ_1, ξ_2) は大域解であり, $t \rightarrow \infty$ とすると $\xi_i(t) \rightarrow \infty, u(x, t) \rightarrow \infty$ (uniformly) が成り立つ. さらに, $t \rightarrow \infty$ とすると $(\frac{1}{t}u(ty, t), \xi_1/t, \xi_2/t) \rightarrow (\psi(y), q_1, q_2)$ が成り立つ.

Theorem 3.4. $C > 0, \alpha_1 > \alpha_2$ かつ

$$E(0) < \frac{(1 - M)(\alpha_1 - \alpha_2)}{C}$$

のとき, (u, ξ_1, ξ_2) はある有限時刻 $T < \infty$ まで存在し, $t \rightarrow T$ とすると $\xi_1(t), \xi_2(t), u(0, t) \rightarrow 0$ が成り立つ. ただし,

$$M := \max \left\{ \frac{\cos(\alpha_1 + \beta_1)}{\cos(\beta_1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2})}, \frac{\cos(\beta_2 - \alpha_2)}{\cos(\beta_2 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2})} \right\} \in (0, 1)$$

とする. さらに, $t \rightarrow T$ とすると任意の $0 < \beta < 1$ に対して

$$\frac{1}{\sqrt{2(T-t)}} u(y\sqrt{2(T-t)}, t) \rightarrow \phi(y) \text{ in } C^{1+\beta}(\text{weakly in } H^2),$$

$$\frac{\xi_i(t)}{\sqrt{2(T-t)}} \rightarrow p_i \text{ as } t \rightarrow T$$

が成り立つ.

Theorem 3.5. $C < 0, \alpha_1 = \alpha_2$ のとき, (u, ξ_1, ξ_2) はある有限時刻 $T < \infty$ まで存在し, $t \rightarrow T$ とすると $\xi_1(t), \xi_2(t), u(0, t) \rightarrow 0$ が成り立つ.

次の定理に使う関数を定義する. 任意の $R > 0$ に対して関数 f_R を以下のように定義する.

$$f_R(x) := -\sqrt{R^2 - (x - C_1 R)^2} + C_2 R \text{ for } C_3 R \leq x \leq C_4 R.$$

ただし定数 C_i は α_i, β_i に依存したある定数とする.

Theorem 3.6. $C < 0, \alpha_1 < \alpha_2$ のとき, (u, ξ_1, ξ_2) は大域解であり, u は定常解 $f_{-1/C}$ に漸近する.

References

- [1] Y.-L. Chang, J.-S. Guo and Y. Kohsaka, *On a two-point free boundary problem for a quasilinear parabolic equation*, Asymptot. Anal. **34** (2003), pp333–358.
- [2] K. Deckelnick, C.M. Elliott and G. Richardson, *Long time asymptotics for forced curvature flow with applications to the motion of a superconducting vortex*, Nonlinearity **10** (1997), pp655–678.

- [3] 儀我 美一, 界面ダイナミクス-曲率の効果-, Technical Report Series of Department of Mathematics, Hokkaido University **56** (1998).
- [4] J.-S. Guo and B. Hu, *On a two-point free boundary problem*, Quart. Appl. Math. **64** (2006), pp413–431.
- [5] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geom. **20** (1984), pp237–266.
- [6] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geom. **31** (1990), pp285–299.