# 多重ゼータ値に対する少し変わった重みつき和公式

門田慎也
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

## 1　導入

多重ゼータ値とは自然数の組 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{N}, \alpha_n \geq 2)$ に対して, 次の級数で定義される実数である:

$$\zeta(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) := \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_n} \frac{1}{{m_1}^{\alpha_1}{m_2}^{\alpha_2}\cdots{m_n}^{\alpha_n}}.$$

$\alpha_n = 1$ だと級数が収束しないため $\alpha_n \geq 2$ としている．$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ のことを重さ (weight), $n$ を深さ (depth) という．$n = 1$ のものがリーマンゼータ値である．この多重ゼータ値の研究は Euler [2] に始まる (当時は depth が 2 のものしか考えられていなかった)．Euler の研究の後, しばらくの間は多重ゼータ値の研究はあまり行われていなかったのだが, 20 世紀に入ってから再び取り上げられ研究されるようになった．1990 年代に入ってからは, 数論幾何や Galois 表現, 結び目不変量や量子群など多くの分野との密接な関わりが注目されるようになり, 研究が活発になってきた．この多重ゼータ値 $\zeta(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ には次のような積分表示があることが知られている.

$$\zeta(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \int\cdots\int_{0<t_1<\cdots<t_{\alpha_1+\cdots\alpha_n}<1} \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_{\alpha_1}}{t_{\alpha_1}}\frac{dt_{\alpha_1+1}}{1-t_{\alpha_1+1}}\frac{dt_{\alpha_1+2}}{t_{\alpha_1+2}}\cdots\frac{dt_{\alpha_1+\alpha_2}}{t_{\alpha_1+\alpha_2}}\times$$
$$\times\cdots\frac{dt_{\alpha_1+\cdots\alpha_{n-1}+1}}{1-t_{\alpha_1+\cdots\alpha_{n-1}+1}}\frac{dt_{\alpha_1+\cdots\alpha_{n-1}+2}}{t_{\alpha_1+\cdots\alpha_{n-1}+2}}\cdots\frac{dt_{\alpha_1+\cdots\alpha_n}}{t_{\alpha_1+\cdots\alpha_n}}.$$

この積分の $\dfrac{dt_i}{1-t_i}$ を級数展開して積分を繰り返すことによって, 上の多重級数と等しいことがわかる．$\dfrac{dt_i}{1-t_i}$ の個数が depth を, $\dfrac{dt_i}{1-t_i}$ と $\dfrac{dt_i}{t_i}$ を

合わせた個数が weight を表している. この積分表示が, 主結果の証明を行う上で非常に重要な役割を果たすのである. 現在, 多重ゼータ値の研究は活発に行われているのであるが, その中の一つに「多重ゼータ値の間の線型関係式を見つける」というものがある. たくさんの関係式を知りたい方は [1] を参照していただきたい. この研究は Euler の時代から行われており, Euler は [2] において次の式を示した.

$$\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=m \\ \alpha_1,\alpha_2\geq 1}} \zeta(\alpha_1,\alpha_2+1)=\zeta(m+1) \quad (m\geq 2).$$

そしてこの関係式を一般の depth に拡張したのが Granville [4] でありそれを和公式と呼ぶ.

さて, タイトルにも出てくる「重みつき和公式」であるが, これはその名の通り多重ゼータ値に重みがついた和公式である. たくさんの重みつき和公式があるのだが, その中の一つに Ohno–Zudilin [6] が示した次の関係式がある.

$$\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=m \\ \alpha_1,\alpha_2\geq 1}} 2^{\alpha_2+1}\zeta(\alpha_1,\alpha_2+1)=(m+2)\zeta(m+1) \quad (m\geq 2).$$

これは, Euler が示した式における多重ゼータ値に重みがついたものと見ることができる. そして Granville が示した和公式における多重ゼータ値に重みがついたもの, すなわち Ohno–Zudilin の結果を一般の depth に拡張したのが Eie–Liaw–Ong [3] であり, 次の関係式だ.

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m}\sum_{j=1}^{n} 2^{\alpha_{2j}+1}\zeta(\alpha_1,\cdots,\alpha_{2n-1},\alpha_{2n}+1)=(m+2n)\zeta(m+1) \quad (m\geq 2n).$$

ただし, $|\boldsymbol{\alpha}|:=\alpha_1+\cdots+\alpha_{2n}$ とし, $\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m}$ は自然数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{2n}$ で和が $m$ になるものにわたる和である.

今回の研究で, Eie–Liaw–Ong の結果のある種の一般化になっている式が得られた.

## 2　主結果

**Theorem 2.1.** 非負の整数 $k, r$ と 4 つのパラメータ $\mu_1, \mu_2, \xi_1, \xi_2$ に対して次の式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a_1+a_2=k\\x_1+x_2=r}} \mu_1^{a_1}\mu_2^{a_2}\xi_1^{x_1}\xi_2^{x_2}\zeta(a_1+x_1+2)\zeta(a_2+x_2+2)\\
&=\sum_{\sigma\in S_2}\Bigg[\sum_{\substack{a_1+a_2=k\\x_1+x_2=r}} \mu_{\sigma(1)}^{a_1}\mu_{\sigma(2)}^{a_2}\xi_{\sigma(1)}^{x_1}\xi_{\sigma(2)}^{x_2}\times\\
&\qquad\times\sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=a_1+x_1+1\\|\boldsymbol{\beta}|=a_2+x_2+1}}\zeta(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{a_1}+1,\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{a_2}+1)+\\
&\quad+\sum_{\substack{a_1+a_2+a_3=k\\x_1+x_2+x_3=r}}\left\{\mu_{\sigma(2)}^{a_3}\xi_{\sigma(2)}^{x_3}+\mu_{\sigma(1)}^{a_3}\xi_{\sigma(1)}^{x_3}\right\}\mu_{\sigma(1)}^{a_1}\xi_{\sigma(1)}^{x_1}(\mu_{\sigma(1)}+\mu_{\sigma(2)})^{a_2}(\xi_{\sigma(1)}+\xi_{\sigma(2)})^{x_2}\times\\
&\qquad\times\sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=a_1+x_1+1\\|\boldsymbol{\beta}|=a_2+x_2+1}}\zeta(\alpha_0,\cdots,\alpha_{a_1},\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{a_2}+\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{a_3}+1).
\end{aligned}
$$

この式において $\mu_1=1, \mu_2=-1, \xi_1=1, \xi_2=1$ とし, 少し計算すると Eie–Liaw–Ong の結果が得られる.

他にも関係式が得られたのだが, 式が長くページに収まりきらないのでここでは省略することにする.

## 参考文献


[1] 荒川恒男, 金子昌信, 多重ゼータ値入門, MI レクチャーノート **23**.

[2] L.Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci.Petropol **20** (1776), 140-186.

[3] M. Eie, W. -C. Liaw, Y. L. Ong, *On generalizations of weighted sum formulas of multiple zeta values*, International J. Number Theory, Vol. 9, No. 5 (2013), 1185–1198.

[4] A.Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, in London Math. Soc. Lecture Note Ser.**247**,Cambridge, 1997, pp.95-101.

[5] Y. Ohno, W. Zudilin, *Zeta stars*, Commun. Number Theory Phys. **2** (2008), 325–347.