Notes on the Hochschild homology dimension and truncated cycles

板垣　智洋 (東京理科大学) *

本講演の内容は眞田克典氏との共同研究 [7] に基づいている．本講演では, 2 以上の整数 m に対して, m-truncated cycle をもつある多元環のクラスのホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示す.

定義 1. 可換環 K 上の多元環 A に対して, 以下の複体 $C(A)$ を A の Hochschild complex という.

$$C(A): \cdots \xrightarrow{b} A^{\otimes(n+1)} \xrightarrow{b} \cdots \xrightarrow{b} A^{\otimes 2} \xrightarrow{b} A \to 0.$$

ただし, $\otimes$ は $\otimes_K$ を表し, $b: A^{\otimes(n+1)} \to A^{\otimes n}$ は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} b(x_0 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = &\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x_0 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n \\ &+ (-1)^n x_n x_0 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n. \end{aligned}$$

可換環 K 上の多元環 A の n 次ホッホシルトホモロジー群は $HH_n(A) = H_n(C(A))$ で定義される.

特に, K 上の多元環 A が K 上 projective なとき, $HH_n(A) \cong \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A, A)$ である．ただし, A^e は A の包絡多元環 $A \otimes A^{\mathrm{op}}$ を表す．また, A の n 次ホッホシルトコホモロジー群は $HH^n(A) = \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, A)$ で定義される.

1989 年, Happel[6] は有限次元多元環のホッホシルトコホモロジーについて, その高次のホッホシルトコホモロジー群がすべて 0 であれば, 大域次元が有限であるかということを問題提起した．後に Happel's question と呼ばれ, 2005 年に Buchweitz, Green, Madsen, Solberg[2] によって反例が挙げられ, 否定的に解決された．2006 年, Han[5] はホッホシルトホモロジー次元 $\mathrm{HHdim}\, A = \sup\{n \in \mathbb{Z} \,|\, HH_n(A) \neq 0\}$ を用いて Happel's question のホモロジー版を予想し, monomial algebra に対して肯定的に解決している.

Bergh, Han, Madsen[3] は多元環のクイバーの組み合わせに着目して, この予想にアプローチしている．具体的には, 以下で定義される m-truncated cycle を導入し, 2-truncated cycle をもつ多元環のホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示している．結果として, 大域次元

* Email: j1112701@ed.tus.ac.jp

が有限な有限次元多元環が 2-truncated cycle を持たないことを示している. さらに, この主張が m-truncated cycle に対しても成り立つのではないかと予想し, monomial algebra に対しては肯定的に解決している.

定義 2 ([3])**.** K を可換環, m を 2 以上の整数とし, Q を有限クイバーとする. Bound quiver algebra KQ/I に対して, $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_u$ が cycle となる矢の列 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_u$ で, 全ての $i(1\leq i\leq u)$ に対して

$$\alpha_i\cdots\alpha_{i+m-1}=0,\quad \alpha_i\cdots\alpha_{i+m-2}\neq 0\quad \text{in } KQ/I$$

を満たすものを m-truncated cycle という. ただし α の添え字は u を法としている.

K を可換環とし, Q を有限クイバーとする. R_Q を KQ の arrow ideal とする. Q_n を長さ n の path 全体の集合, Q_n^{c} を長さ n の cycle 全体の集合とすると, 位数 n の巡回群 $G_n=\langle t_n\rangle$ の Q_n^{c} 上の作用が $t_n(\alpha_1\otimes\alpha_2\cdots\alpha_n)=\alpha_n\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}$ で与えられる. Cycle γ に対して, $\operatorname{per}\gamma$ を $\gamma=\delta^r$ を満たす δ の長さで最小なものとする.

Sköldberg[8] は可換環 K 上の truncated quiver algebra KQ/R_Q^m について, その射影分解を与え, ホッホシルトホモロジーの加群構造を決定している. 各ホッホシルトホモロジー群の生成元を具体的に表示すると, 以下の補題が得られる.

補題 3 ([7])**.** K を体とし, A を truncated quiver algebra KQ/R_Q^m とする. $\bar{\gamma}\in Q_{cm}^{\mathrm{c}}/G_{cm}$ ($\gamma=\alpha_1\cdots\alpha_{cm}$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_{cm}\in Q_1$) に対して, 以下は non-zero homology class に一致する:

$$\alpha_{(c-1)m+i+1}\cdots\alpha_{cm}\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\otimes\alpha_i\cdots\alpha_{(c-1)m+i}\in A\otimes_{KQ_0^e}\Gamma^{((c-1)m+1)}.$$

ただし, $i=1,2,\ldots,\gcd(m,\operatorname{per}\bar{\gamma})-1$ で $\Gamma^{(i)}$ は

$$\Gamma^{(i)}=\begin{cases} Q_{cm} & \text{if } i=2c\ (c\geq 0),\\ Q_{cm+1} & \text{if } i=2c+1\ (c\geq 0)\end{cases}$$

で与えられる. また, $\operatorname{per}\bar{\gamma}=\operatorname{per}\gamma$ とする.

補題 4 ([7])**.** K を体とし, A を truncated quiver algebra KQ/R_Q^m とする. $\bar{\gamma}\in Q_{cm+e}^{\mathrm{c}}/G_{cm+e}$ ($1\leq e\leq m-1$, $\gamma=\alpha_1\cdots\alpha_{cm+e}$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_{cm+e}\in Q_1$) に対して, 以下は non-zero homology class に一致する:

$$\alpha_{cm+1}\cdots\alpha_{cm+e}\otimes\alpha_1\cdots\alpha_{cm}\in A\otimes_{KQ_0^e}\Gamma^{(cm)}.$$

これらの補題と Ames, Cagliero, Tirao[1] によって与えられている truncated quiver algebra の Sköldberg による射影分解 [8] と Cibils による射影分解 [4] の間の chain map を用いて, m-truncated cycle をもつある多元環のクラスのホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示す.

以下が主結果である.

定理 5 ([7])**.** K を体, Q を有限クイバー, $I \subset KQ$ を R_Q^m に含まれるイデアルとする. KQ/I が *m-truncated cycle* $\alpha_1, \dots, \alpha_u$ を含むとする. このとき, 次が成り立つ :

(i) $\gcd(m, \mathrm{per}(\alpha_1 \cdots \alpha_u)) \neq 1$ を仮定する. $un \equiv 0 \pmod m$ を満たす $n \geq 1$ に対して, 元

$$\begin{aligned}&\alpha_{(c-1)m+2} \cdots \alpha_{cm} \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_m \otimes \alpha_{m+1} \\ &\quad \otimes \alpha_{m+2} \cdots \alpha_{2m} \otimes \alpha_{2m+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{(c-2)m+2} \cdots \alpha_{(c-1)m} \otimes \alpha_{(c-1)m+1}\end{aligned}$$

は $HH_{2c-1}(KQ/I)$ で 0 でない. ここで $c = un/m$ とする.

(ii) e を $1 \leq e \leq m-1$ である整数とする. $un \equiv e \pmod m$ を満たす $n \geq 1$ に対して, 元

$$\begin{aligned}\sum_{0 \leq j_1, \dots, j_c \leq m-2} &\alpha_{2c+1+j_1+\cdots+j_c} \cdots \alpha_{un} \\ &\otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{1+j_1} \otimes \alpha_{2+j_1} \otimes \alpha_{3+j_1} \cdots \alpha_{3+j_1+j_2} \otimes \alpha_{4+j_1+j_2} \otimes \cdots \\ &\qquad \otimes \alpha_{2c-1+j_1+\cdots+j_{c-1}} \cdots \alpha_{2c-1+j_1+\cdots+j_c} \otimes \alpha_{2c+j_1+\cdots+j_c}\end{aligned}$$

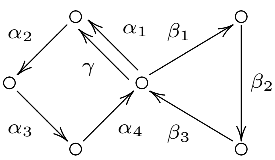
は $HH_{2c}(KQ/I)$ で 0 でない. ここで $c = (un-e)/m$ とする.

特に $\mathrm{HHdim}\,(KQ/I) = \infty$ である.

系として以下を得た.

系 6 ([7])**.** K を体とし, Q を有限クイバー, I を R_Q^m に含まれる KQ の *admissible ideal* とする. 多元環 KQ/I が有限の大域次元を持つとき, Q は *m-truncated cycles* を持たない.

例 7 ([7])**.** 以下のクイバー Q とイデアル I で定まる bound quiver algebra KQ/I を考える:



$$\begin{aligned}&\alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_{i+2} = \beta_1\beta_2\beta_3 = \beta_3\gamma\alpha_2 = 0, \\ &\beta_2\beta_3\alpha_1 = \beta_2\beta_3\gamma,\end{aligned}$$

$$I = \langle \alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}, \beta_1\beta_2\beta_3, \beta_3\gamma\alpha_2, \beta_2\beta_3\alpha_1 - \beta_2\beta_3\gamma \rangle \quad (1 \leq i \leq 4).$$

ただし, α の添え字は 4 を法とする. このとき, $R_Q^6 \subset I \subset R_Q^3$ で, KQ/I は 3-truncated cycle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ をもつ. したがって, $\mathrm{HHdim}\,KQ/I = \infty$. ゆえに, KQ/I の大域次元は無限大である.

参考文献

[1] G. Ames, L. Cagliero and P. Tirao, *Comparison morphisms and the Hochschild cohomology ring of truncated quiver algebras*, J. Algebra 322(5)(2009), 1466–1497.

[2] R.-O. Buchweitz, E. Green, D. Madsen and Ø. Solberg, *Finite Hochschild cohomology without finite global dimension*, Math. Res. Lett. 12 (2005), no. 5-6, 805–816.

[3] P.A. Bergh, Y. Han and D. Madsen, *Hochschild homology and truncated cycles*, Proc. Amer. Math. Soc. (2012), no. 4, 1133–1139.

[4] C. Cibils, *Cohomology of incidence algebras and simplicial complexes*, J. Pure Appl. Algebra 56(3) (1989), 221–232.

[5] Y. Han, *Hochschild (co)homology dimension*, J. Lond. Math. Soc. (2) 73 (2006), no. 3, 657–668.

[6] D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, in *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin, 39ème Année (Paris, 1987/1988)*, Lectrue Notes in Mathematics 1404, Springer, Berlin, 1989, 108–126.

[7] T. Itagaki, K. Sanada, *Notes on the Hochschild homology dimension and truncated cycles*, Arch. Math. 103 (2014), 219–228.

[8] E. Sköldberg, *The Hochschild homology of truncated and quadratic monomial algebras*, J. Lond. Math. Soc. (2) 59 (1999), no. 1, 76–86.