On deformations of isolated singularities of polar weighted homogeneous mixed polynomials

稲葉和正 (東北大学)*

1. Mixed polynomials

$P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ を複素変数 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ とその複素共役 $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ を用いて次のように表される多項式とする:

$$P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) := \sum_{\nu,\mu} c_{\nu,\mu} \mathbf{z}^{\nu} \bar{\mathbf{z}}^{\mu},$$

ここで $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ に対して $\mathbf{z}^{\nu} = z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}$ ($\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ に対して $\bar{\mathbf{z}}^{\mu} = \bar{z}_1^{\mu_1} \cdots \bar{z}_n^{\mu_n}$) と定める．このような多項式を混合多項式と呼ぶ [18, 19]. 各 $j = 1, \ldots, n$ に対して $P\big((0, \ldots, 0, z_j, 0, \ldots, 0), (0, \ldots, 0, \bar{z}_j, 0, \ldots, 0)\big) \not\equiv 0$ が成り立つとき, $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は convenient であるという．

$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と $\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を $\mathbb{R}^{2n}$ から $\mathbb{R}$ への実多項式写像とし, 実変数を $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ とおく．このとき $(\rho_1, \rho_2) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$ は次のように混合多項式写像で表すことができる:

$$P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) := \rho_1\Big(\frac{\mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}}}{2}, \frac{\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}}{2i}\Big) + i\rho_2\Big(\frac{\mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}}}{2}, \frac{\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}}{2i}\Big),$$

ここで $z_j = x_j + iy_j$ ($j = 1, \ldots, n$).

$\Re P$ と $\Im P$ はそれぞれ混合多項式 P の実部と虚部とする．$\Re P$ と $\Im P$ のグラディエントが一次従属になる点 $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ を P の特異点という．P の特異点 $\mathbf{w}$ は次の性質をもつ．

Proposition 1 ([18] Proposition 1)**.** *次の条件は同値である:*

1. *$\mathbf{w}$ は P の特異点である．*
2. *ある複素数 α が存在して, $|\alpha| = 1$,*

$$\Big(\overline{\frac{\partial P}{\partial z_1}}(\mathbf{w}), \ldots, \overline{\frac{\partial P}{\partial z_n}}(\mathbf{w})\Big) = \alpha\Big(\frac{\partial P}{\partial \bar{z}_1}(\mathbf{w}), \ldots, \frac{\partial P}{\partial \bar{z}_n}(\mathbf{w})\Big).$$

2. Milnor fibrations

$P(\mathbf{z})$ は $\mathbb{C}^n$ の原点 $\mathbf{o} = (0, \ldots, 0)$ で消える n 変数 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ の複素多項式とする．$\mathbf{o}$ は $P(\mathbf{z})$ の特異点, つまり $(\partial P/\partial z_1)(\mathbf{o}) = \cdots = (\partial P/\partial z_n)(\mathbf{o}) = 0$ をみたす点とする．1968 年に J. Milnor は次のことを証明した．

Theorem 1 ([14])**.** *十分小さい正の数 ε_0 が存在して, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ をみたす任意の正の数 ε に対し,*

$$\frac{P}{|P|} : S_{\varepsilon}^{2n-1} \setminus K_P \to S^1$$

は局所自明なファイバー束になる．ここで S_{ε}^{2n-1} は $(2n-1)$ 次元の原点を中心にもつ半径 ε の球面とし, $K_P = S_{\varepsilon}^{2n-1} \cap P^{-1}(0)$ とおく．

* e-mail: sb0d02@math.tohoku.ac.jp

このファイバー束をMilnor束と呼ぶ. 原点が$P(\mathbf{z})$の孤立特異点になるとき, このファイバー束の各ファイバーは$(n-1)$次元球面S^{n-1}のブーケ$S^{n-1}\vee\cdots\vee S^{n-1}$と同じホモトピー型をもつ. ブーケとは$S^{n-1}$の$\mu$個のコピー$S_1^{n-1},\ldots,S_\mu^{n-1}$を用意し, そこから1点$x_j\in S_j^{n-1}$を選ぶ. そして, 球面のコピーの非交和$S_1^{n-1}\cup\cdots\cup S_\mu^{n-1}$において$x_1,\ldots,x_\mu$を1点に同一視して得られる位相空間のことをいう. この位相空間は点x_jの選び方に依存しない. よってファイバーFのホモロジー群は

$$H_k(F;\mathbb{Z})=\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z} & k=n-1\\ \mathbb{Z} & k=0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

となる. またファイバーFの閉包は内部がFで境界がK_Pになる滑らかな多様体である. このときK_Pはホモトピー群$\pi_j(K_P)$ $(0\le j\le n-3)$が全て自明になる滑らかな多様体である. このような多様体を$(n-3)$-連結であるという. K_Pを特異点の絡み目と呼ぶ. 複素超曲面の特異点の絡み目は, 後で説明する単純なファイバー絡み目の重要な例になっている. 例えば$n=2$のとき, $f(\mathbf{z})=z_1^p+z_2^q$としたときの$K_f$は$(p,q)$-トーラスリンクになる. 一般には複素多項式の孤立特異点から定まる絡み目はトーラスリンクのケーブルリンクで, ケーブルの係数たちはある不等式をみたしているものになる [6].

混合多項式$P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$が非退化なとき, 複素多項式と同様にMilnor束が存在することが知られている [19].

3. Polar weighted homogeneous mixed polynomials

$p_1,\ldots,p_n$は$\gcd(p_1,\ldots,p_n)=1$をみたす整数, $q_1,\ldots,q_n$は非負な整数とする. このとき$\mathbb{C}^n$上のS^1-作用と$\mathbb{R}^*$-作用を次のように定義する:

$$s\circ\mathbf{z}=(s^{p_1}z_1,\ldots,s^{p_n}z_n),\quad s\in S^1.$$
$$r\circ\mathbf{z}=(r^{q_1}z_1,\ldots,r^{q_n}z_n),\quad r\in\mathbb{R}^*.$$

もし正の整数d_pが存在して$P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$が次の等式をみたすとする:

$$P(s^{p_1}z_1,\ldots,s^{p_n}z_n,\bar{s}^{p_1}\bar{z}_1,\ldots,\bar{s}^{p_1}\bar{z}_n)=s^{d_p}P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}),\quad s\in S^1,$$

このとき混合多項式Pはpolar weighted homogeneousであるという. また正の整数d_rが存在して$P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$が次の等式をみたすき, Pはradial weighted homogeneousであるという:

$$P(r^{q_1}z_1,\ldots,r^{q_n}z_n,r^{q_1}\bar{z}_1,\ldots,r^{q_n}\bar{z}_n)=r^{d_r}P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}),\quad r\in\mathbb{R}^*.$$

polar かつ radial weighted homogeneous な混合多項式$P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$が複素多項式のとき, $P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$は擬斉次多項式と呼ぶ. もし$P$がpolar かつ radial weighted homogeneous ならば,

$$P:\mathbb{C}^n\setminus P^{-1}(0)\to\mathbb{C}^*$$

は局所自明なファイバー束であり, モノドロミー写像$h:F\to F$は

$$h(\mathbf{z})=\exp\bigl(\frac{2\pi i}{d_p}\bigr)\circ\mathbf{z}=\Bigl(z_1\exp\bigl(\frac{2p_1\pi i}{d_p}\bigr),\ldots,z_n\exp\bigl(\frac{2p_n\pi i}{d_p}\bigr)\Bigr)$$

で与えられる [20, 4, 18, 19].

混合多項式 $P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$ は polar かつ radial weighted homogeneous であると仮定する．このとき次の等式が成り立つ:

$$d_pP(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) = \sum_{j=1}^n p_j\left(\frac{\partial P}{\partial z_j}z_j - \frac{\partial P}{\partial \bar{z}_j}\bar{z}_j\right),$$
$$d_rP(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) = \sum_{j=1}^n q_j\left(\frac{\partial P}{\partial z_j}z_j + \frac{\partial P}{\partial \bar{z}_j}\bar{z}_j\right).$$

また $j=1,\dots,n$ に対して, $p_j = q_j$ ならば,

$$\sum_{j=1}^n p_j\frac{\partial P}{\partial z_j}z_j = \frac{d_p+d_r}{2}P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$$

が成り立つ.

4. Deformations

混合多項式 $P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$ の変形とは多項式写像

$$F_t : \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, (\mathbf{z}, t) \mapsto F_t(\mathbf{z})$$

で, $F_0(\mathbf{z}) = P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$ をみたすものとする．原点 $\mathbf{o}$ は $P(\mathbf{z})$ の孤立特異点と仮定する．このとき $K_P := S_\varepsilon^{2n-1} \cap P^{-1}(0)$ は S_ε^{2n-1} に余次元 2 で埋め込まれた滑らかな多様体になる．ここで S_ε^{2n-1} は原点中心の半径 ε の $2n-1$ 次元球面である $(0 < \varepsilon << 1)$.

複素特異点のとき, 原点の近傍 U と $P(\mathbf{z})$ の変形 F_t で各 $0 < t << 1$ に対して $F_t(\mathbf{z})$ は複素多項式で, U 内の $F_t(\mathbf{z})$ の特異点は Morse 特異点になるものが存在する (Morsification) [5]．ここで Morse 特異点とは次の多項式の特異点として表される特異点のことである: $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$. 特に $n = 2$ のときは, Milnor 束のモノドロミー写像の計算に応用することができる [1, 8, 9, 10].

5. Milnor 数の enhancement

(S^{2n-1}, K) を絡み目, つまり K は $(2n-1)$ 次元球面 S^{2n-1} 内の余次元 2 の向き付けられた閉多様体とする．$N(K)$ で K の S^{2n-1} 内のチューブ近傍を表し, $E(K) = S^{2n-1}\setminus \mathrm{Int}(N(K))$ とおく．$N(K)$ が 2 次元円板上のファイバー束

$$\phi_0 : N(K) \to D^2$$

と $E(K)$ が S^1 上のファイバー束

$$\phi_1 : E(K) \to S^1$$

をもち, さらに $\phi_0|\partial N(K) = \phi_1|\partial N(K)$ をみたすとき, K をファイバー絡み目という．このファイバー束は S^{2n-1} のオープンブック分解とも呼ばれている．ファイバー絡み目 K が $(n-3)$-連結かつファイバー曲面が $(n-2)$-連結のとき K は単純であるという．複素多項式から定まるファイバー絡み目は単純であることが知られている [14]．ただし, 混合多項式のときはファイバー絡み目が常に単純になるのかはわかっていない. 単純なファイバー絡み目 (S^{2n-1}, K) のファイバーの $(n-1)$ 次ホモロジー群のランクを Milnor 数と呼び $\mu(K)$ で表す.

W. Neumann と L. Rudolph はファイバー絡み目の研究のために接束 $TS^{2n-1} \oplus \mathbb{R}$ 内の向き付けられた $(2n-2)$ 次元平面場で $E(K)$ 上では K のファイバー束の各ファイバーに横断的に交わっていて, K 上では $K \oplus \mathbb{R}$ に接している平面場を研究した [15, 16, 17, 21]. この平面場は写像 $\Lambda : S^{2n-1} \to G(2n-2, 2n)$ を定義する．ここで $G(2n-2, 2n)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 内の向き付けられた $(2n-2)$ 次元の平面場によるグラスマン多様体である．Neumann と Rudolph はホモトピー群 $\pi_{2n-1}(G(2n-2, 2n))$ が

$$\pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \oplus \pi_{2n-1}(S^{2n-2}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$$

と同型であることを示した．ここで $n = 2$ のとき $r = 0$ で $n > 2$ のとき $r = 2$ とする．さらに, Λ のホモトピー類は $((-1)^n\mu(K), \lambda(K)) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ と表すことができることを示した．この整数の組 $((-1)^n\mu(K), \lambda(K))$ のことを enhanced Milnor 数と呼び, $\lambda(K)$ のことを Milnor 数の enhancement と呼ぶ．$P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が複素多項式のときは常に $\lambda(K_P) = 0$ になることが知られている．一方で次の定理が成り立つ．

Theorem 2 ([11], Theorem 1)**.** *任意の $k \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ に対して, $\lambda(K_P) = k$ を満たすファイバー束 $P/|P| : S^{2n-1}_\varepsilon \setminus K_P \to S^1$ をもつ混合多項式 $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が存在する．*

もし混合多項式 $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ の孤立特異点が変形により Morse 特異点のみに分裂するならば, $\lambda(K_P) \geq 0$ となる．よって混合多項式の孤立特異点で Morse 特異点に分裂しないものが存在する．

6. Generic maps

X と Y はそれぞれ n 次元と m 次元の滑らかな多様体とする．また $C^\infty(X, Y)$ は X から Y への滑らかな写像全体の集合とする．$f, g \in C^\infty(X, Y)$ が $p \in X$ において r-同値であるとは, $f(p) = g(p)$ であり, p を中心とする局所座標系 (U, φ) と $f(p)$ を中心とする局所座標系 (V, ψ) に対して,

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}(\psi \circ f_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}(\varphi(p)) = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}(\psi \circ g_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}(\varphi(p))$$

が全ての $1 \leq i \leq m$, および $k_1 + \cdots k_n \leq r$ なる負でない整数の全ての組 $(k_1, \ldots, k_n)$ に対して成立するときにいう．ここで $f = (f_1, \ldots, f_m), g = (g_1, \ldots, g_m)$ とおく．

r-同値は $C^\infty(X, Y)$ の元の間の同値関係である．f の属する同値類を f の p における r-ジェットといい, 記号 $j^r f(p)$ で表す．また $f : X \to Y$ で $f(p) = q$ を満たす p における r-ジェット全体の集合を $J^r(X, Y, p, q) = \{j^r f(p) \mid f(p) = q\}$ と書き,

$$J^r(X, Y) := \bigcup_{(p,q) \in X \times Y} J^r(X, Y, p, q)$$

とおく．このとき $J^r(X, Y)$ は r-ジェット空間という．$J^r(X, Y)$ は滑らかな多様体であり, f の r-拡大 $j^r f : X \to J^r(X, Y)$ は $p \mapsto j^r f(p)$ と定義すると $j^r f$ は滑らかな写像である．

以下では $m = 2$ と仮定する．$J^1(X, Y)$ は $(3n+2)$ 次元多様体である．$J^1(X, Y)$ の余次元 $(n-2+k)k$-部分多様体を次のように定義する:

$$S_k(X, Y) = \{j^1 f(p) \in J^1(X, Y) \mid \operatorname{rank} df_p = 2 - k\} \quad (k = 1, 2).$$

また $S_k(f)$ を次のように定義する:

$$S_k(f) = \{\mathbf{z} \in U \mid \mathrm{rank}\, df(\mathbf{z}) = 2-k\} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

ここで $S_0(f)$ は f の正則点の集合であり, $S_1(f) \cup S_2(f)$ は f の特異点集合である.

滑らかな写像 $f: X \to Y$ がジェネリックであるとは, f が次の条件をみたすときである [13]:

1. $j^1 f$ は $S_1(X,Y)$ 及び $S_2(X,Y)$ と横断的に交わる,
2. $j^2 f$ は $S_1^2(X,Y)$ と横断的に交わる,

ここで $S_1^2(f) = S_1(f|S_1(f))$ と表し, $S_1^2(X,Y)$ は次のように定義する:

$$S_1^2(X,Y) = \left\{ j^2 f(p) \in J^2(X,Y) \;\middle|\; \begin{array}{l} j^1 f(p) \in S_1(X,Y), \\ j^1 f(p) \text{ is transversal to } S_1(X,Y), \\ \mathrm{rank} d(f \mid S_1(f))(p) \ = \ 0 \end{array} \right\}.$$

もし $f: X \to Y$ がジェネリックならば, ある $p \in S_1(f)$ 中心の局所座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ が存在して, p の近傍で f は次のいずれかの形で書ける:

$$\begin{aligned} &(1) \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \sum_{j=2}^{n} \pm x_j^2), \\ &(2) \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \sum_{j=3}^{n} \pm x_j^2 + x_1 x_2 + x_2^3). \end{aligned}$$

(1) のときは p は折り目特異点であるといい, (2) のときは p はカスプであるという. また各 x_j $(j = 2, \ldots, n)$ の係数が全て正または負のときは定値折り目特異点と呼び, そうではないとき不定値折り目特異点と呼ぶ.

ジェネリック写像は $C^\infty(X,Y)$ 内で稠密に存在することが知られている. 4 次元多様体から 2 次元多様体への滑らかな写像が特異点として, Morse 特異点と不定値折り目特異点しかもたないとき, broken Lefschetz fibration という [2, 3, 7, 22].

7. Main results

本講演では次のような混合多項式 $f(\mathbf{z})\overline{g(\mathbf{z})}$ の変形を考える. $f(\mathbf{z})$ と $g(\mathbf{z})$ は convenient な 2 変数複素擬斉次多項式で共通の分枝を持たず, 原点が孤立特異点になると仮定する.

また $\mathbb{C}^2$ 上の $\mathbb{C}^*$-作用を次のように定義する:

$$c \circ \mathbf{z} = (c^q z_1, c^p z_2), \quad c \in \mathbb{C}^*, \quad \gcd(p,q) = 1.$$

このとき $f(\mathbf{z})\overline{g(\mathbf{z})}$ は $f(c \circ \mathbf{z})\overline{g(c \circ \mathbf{z})} = c^{pq(m-n)} f(\mathbf{z})\overline{g(\mathbf{z})}$ $(m > n)$ をみたすと仮定する. U は原点 $\mathbf{o}$ の十分小さい近傍とする. 最初に次のような $f(\mathbf{z})\overline{g(\mathbf{z})}$ の変形を考える:

$$F_t(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})\overline{g(\mathbf{z})} + t h(\mathbf{z}),$$

$$h(\mathbf{z}) = \begin{cases} \gamma_1 z_1^{p(m-n)} + \gamma_2 z_2^{q(m-n)} & (g(\mathbf{z}) \text{ は線形多項式ではない}) \\ z_1^m \bar{z}_1 + z_1^{m-1} + \gamma z_2^{m-1} & (g(\mathbf{z}) \text{ は線形多項式}). \end{cases}$$

このとき $F_t(\mathbf{z})$ の特異点は次の性質を持つ:

- $S_j(F_t)$ の各連結成分は S^1-作用の軌道になる,
- $S_2(F_t)=\{\mathbf{o}\}$ または $\emptyset$.

さらに次の性質をみたす $h(\mathbf{z})$ の存在を示すことができる.

Theorem 3 ([12])**.** *U 内では $S_1(F_t)$ の各点が不定値折り目特異点になり, 原点 $\mathbf{o}$ のリンク $F_t^{-1}(0)\cap S_\varepsilon^3$ が $(p(m-n),q(m-n))$-トーラスリンクになる $h(\mathbf{z})$ が存在する.*

次に定理3で得られた $F_t(\mathbf{z})$ の変形を考える:

$$F_{t,s}(\mathbf{z}):=f(\mathbf{z})\overline{g}(\mathbf{z})+th(\mathbf{z})+s\ell(\mathbf{z}),$$

ここで $\ell(\mathbf{z})=c_1z_1+c_2z_2, c_1,c_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $0<s<<t<<1$ とする.

Theorem 4 ([12])**.** *$F_t(\mathbf{z})$ は定理3の $f(\mathbf{z})\overline{g}(\mathbf{z})$ の変形とする. このとき $S_1(F_{t,s})$ の各点が不定値折り目特異点になり, $S_2(F_{t,s})$ の各点が混合 Morse 特異点になる $\ell(\mathbf{z})$ が存在する.*

ここで $\mathbf{w}$ を混合多項式 $P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$ の孤立特異点, $c=P(\mathbf{w},\bar{\mathbf{w}})$ で $S_{\mathbf{w}}^{2n-1}$ は $\mathbf{w}$ 中心の球面とする. もしリンク $P^{-1}(c)\cap S_{\mathbf{w}}^{2n-1}$ が有向リンクとして複素 Morse 特異点のリンクとアイソトピックならば, $\mathbf{w}$ を混合 Morse 特異点と呼ぶ.

参考文献

[1] N. A'Campo, *Le group de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes plane. I*, Math. Ann. **213** (1975), 1–32.

[2] D. Auroux, S.K. Donaldson and L. Katzarkov, *Singular Lefschetz pencils*, Geom. Topol. **9** (2005), 1043–1114.

[3] R. I. Baykur, *Existence of broken Lefschetz fibrations*, Int. Math. Res. Not. (2008), Art. ID rnn 101, 15pp.

[4] J. L. Cisneros-Molina, *Join theorem for polar weighted homogeneous singularities*, Singularities II, edited by J. P. Brasselet, J. L. Cisneros-Molina, D. Massey, J. Seade and B. Teissier, Contemp, Math. **475**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 43–59.

[5] W. Ebeling, Functions of several complex variables and their singularities, Translated from the 2001 German original by Philip G. Spain, Graduate Studies in Math. 83, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2007.

[6] D. Eisenbud and W. Neumann, Three-Dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities, Annals of Mathematics Studies 110, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1985.

[7] D. Gay and R. Kirby, *Constructing Lefschetz-type fibrations on four manifolds*, Geom. Topol. **11** (2007), 2075–2115.

[8] S.M. Gusein-Zade, *Intersection matrices for certain singularities of functions of two variables*, Funt. Anal. Appl. **8** (1974), 10–13.

[9] S.M. Gusein-Zade, *The monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces*, Russian. Math. Surveys **32** (1977), 23–69.

[10] S.M. Gusein-Zade, *Dynkin diagrams of singularities of functions of two variables*, Funt. Anal. Appl. **8** (1974), 295–300.

[11] K. Inaba, *On the enhancement to the Milnor number of a class of mixed polynomials*, J. Math. Soc. Japan. **66** (2014), 25–36.

[12] K. Inaba, *On deformations of isolated singularities of polar weighted homogeneous mixed polynomials*, arXiv:1409.0120.

[13] H. Levine, *Elimination of cusps*, Topology. **3** (1965), 263–296.

[14] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Annales of Mathematics Studies 61, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.

[15] W. Neumann and L. Rudolph, *Unfoldings in knot theory*, Math. Ann. **278** (1987), 409–439.

[16] W. Neumann and L. Rudolph, *The enhanced Milnor number in high dimensions*, Differential Topology Proceedings, Siegen 1987, edited by U. Koschorke, Springer Lecture Notes in Math. 1350, Springer-Verlag, 1988, pp.109–121.

[17] W. Neumann and L. Rudolph, *Difference index of vectorfields and the enhanced Milnor number*, Topology, **29** (1990), 83–100.

[18] M. Oka, *Topology of polar weighted homogeneous hypersurfaces*, Kodai Math. J. **31** (2008), 163–182.

[19] M. Oka, *Non-degenerate mixed functions*, Kodai Math. J. **33** (2010), 1–62.

[20] M. A. S. Ruas, J. Seade and A. Verjovsky, *On real singularities with a Milnor fibration*, Trends Math., edited by A. Libgober and M. Tibăr, Birkhäuser, Basel, 2003, 191–213.

[21] L. Rudolph, *Isolated critical points of maps from* $\mathbb{R}^4$ *to* $\mathbb{R}^2$ *and a natural splitting of Milnor number of a classical fibered link. Part 1*, Comment. Math. Helv., **62** (1987), 630–645.

[22] O. Saeki, *Elimination of definite fold*, Kyushu J. Math. **60** (2006), 363–382.