$\mathbf{C}^{2n}$ の複素超曲面における複素概接触計量構造について

今田 充洋 (慶應義塾大学大学院 基礎理工学専攻)

1 序

実 $(2n+1)$ 次元多様体上の接触構造とは, ある 1 形式 η が存在して, $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ を満たすものであった. この概念を奇数次元の複素多様体へ拡張したものを考えたい. この拡張は Kobayashi の論文 [6] に始まり, それ以来 Ishihara-Konishi [5], Blair [2] らの研究により進展が見られている. 実接触幾何において, normality をもつ接触構造は佐々木構造と呼ばれ, 近年, 物理学からも注目される重要な存在となっている. 本講演では複素接触多様体に対する normality と, $\mathbf{C}^{2n}$ の複素超曲面における複素概接触計量構造について紹介する.

2 定義

Definition 2.1. M を $(2n+1)$ 次元の複素多様体, $\{\mathcal{O}_\lambda\}$ をその開被覆とする. M が複素接触多様体であるとは, 以下の 1) と 2) を満たすものとする.

1) 各 $\mathcal{O}_\lambda$ において正則 1 形式 ω_λ がとれて, $\mathcal{O}_\lambda$ の各点で, $\omega_\lambda \wedge (d\omega_\lambda)^n \neq 0$.
2) $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu \neq \phi$ ならば, その上に 0 でない正則関数 $h_{\lambda\mu}$ が存在し, $\omega_\lambda = h_{\lambda\mu}\omega_\mu$.

各 $\mathcal{O}_\lambda$ において, $\mathcal{H}_\lambda = \{X \in T\mathcal{O}_\lambda \,|\, \omega_\lambda(X) = 0\}$ と定義しておく. $h_{\lambda\mu}$ たちは 0 でないので, $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu$ 上で $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_\mu$ が成り立つ. よって $\mathcal{H} = \cup \mathcal{H}_\lambda$ は well-defined で, M 上の正則かつ, 可積分でない subbundle である. これを horizontal subbundle と呼ぶ.

Definition 2.2. (M, J, g) を $(4n+2)$ 次元の Hermite 多様体 (J は概複素構造, g は Hermite 計量), $\{\mathcal{O}_\lambda\}$ をその開被覆とする. M が複素概接触計量多様体とは, 以下の 1) と 2) を満たすものとする.

1) 各 $\mathcal{O}_\lambda$ において, 1 形式 u_λ と $v_\lambda = u_\lambda J$, (1,1)-テンソル G_λ と $H_\lambda = G_\lambda J$, 単位ベクトル場 U_λ と $V_\lambda = -JU_\lambda$ が存在して, 以下を満たす.

$$H_\lambda^2 = G_\lambda^2 = -id + u_\lambda \otimes U_\lambda + v_\lambda \otimes V_\lambda, \quad g(G_\lambda X, Y) = -g(X, G_\lambda Y),$$
$$g(U_\lambda, X) = u(X), \quad G_\lambda J_\lambda = -J_\lambda G_\lambda, \quad G_\lambda U_\lambda = 0, \quad u_\lambda(U_\lambda) = 1.$$

2) $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu \neq \phi$ ならば, $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}_\mu$ 上に $a^2 + b^2 = 1$ なる関数 a, b が存在して,

$$u_\mu = au_\lambda - bv_\lambda, \quad v_\mu = bu_\lambda + av_\lambda, \quad G_\mu = aG_\lambda - bH_\lambda, \quad H_\mu = bG_\lambda + aH_\lambda.$$

複素接触多様体 M に対して, $\omega_\lambda = u_\lambda - iv_\lambda$ と 2 つの実形式に分解することで M 上に複素概接触計量構造を構成出来る. これを複素接触計量構造と呼ぶ. 定義は以下の通りである.

Definition 2.3. $(J_\lambda, G_\lambda, H_\lambda, u_\lambda, v_\lambda, U_\lambda, V_\lambda, g)$ が M 上の複素接触計量構造とは

$$\begin{aligned} g(X, G_\lambda Y) &= du_\lambda(X,Y) + (\sigma_\lambda \wedge v_\lambda)(X,Y), \\ g(X, H_\lambda Y) &= dv_\lambda(X,Y) - (\sigma_\lambda \wedge u_\lambda)(X,Y) \end{aligned}$$

を満たす複素概接触計量構造とする．ここで $\sigma_\lambda(X) = g(\nabla_X U, V)$ (∇ は g に関する Levi-Civita 接続).

Example 2.4. $\mathbf{C}^3$ 上に（大域的な）正則 1 形式 $\omega = (dz_3 - z_2 dz_1)/2$ が存在して,$\mathbf{C}^3$ は複素接触多様体になる．さらに複素接触計量構造が Blair ら [1] により構成されている．

3 Normality

記号はこれまでの通りとする (以下, 添字は省略する)．Ishihara-Konishi [3] は複素概接触計量構造 (J, G, H, u, v, U, V, g) の normality を, 以下に定義する 2 つのテンソル S, T が恒等的に 0 になることと定義した.

$$\begin{aligned} (1)\quad S(X,Y) &= [G,G](X,Y) + 2g(X,GY)U - 2g(X,HY)V + 2v(Y)HX \\ &\quad -2v(X)HY + \sigma(GY)HX - \sigma(GX)HY + \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX, \\ (2)\quad T(X,Y) &= [H,H](X,Y) - 2g(X,GY)U + 2g(X,HY)V + 2u(Y)GX \\ &\quad -2u(X)GY + \sigma(HX)GY - \sigma(HY)GX - \sigma(Y)GHX + \sigma(X)GHY. \end{aligned}$$

$[\cdot,\cdot]$ は Nijenhuis テンソルとする．Normality を満たす多様体の例として, Fubini-Study 計量をもった $\mathbf{C}P^{2n+1}$ が挙げられる．ここで, 講演者の結果を一つ紹介する.

Proposition 3.1 [4] M 上の複素接触計量構造が normality をもてば,

$$K(X,JX) + K(X,GX) + K(X,HX) = 6 \qquad (X \in \mathcal{H})$$

が成り立つ．ここに, $K(X,Y)$ は X, Y により生成される平面による断面曲率を表す.

Example 2.4 の $\mathbf{C}P^{2n+1}$ に関して断面曲率を計算すると, $K(X,JX) = 4$, $K(X,GX) = K(X,HX) = 1$ と求まる (実際, これは normality をもっている)． しかしこれ以外に normality をもった複素接触計量多様体はまだ見つかっていない.

4 Kähler 多様体における複素超曲面

この章は Smyth [7] の論文に基づく．$(\widetilde{M}, \tilde{J}, \tilde{g})$ を Kähler 多様体とし, M をその複素超曲面とする (両者を実多様体とみなせば, $\widetilde{M}$ は偶数次元の多様体, M は余次元 2 の部分多様体である)．また $\widetilde{M}$ の $\tilde{g}$ に関する Levi-Chivita 接続を $\widetilde{\nabla}$ と表すことにする．このとき $\widetilde{M}$ 上の Kähler 構造 $(\tilde{J}, \tilde{g})$ が M 上に Kähler 構造 (J, g) を誘導する．いま適当な ξ を, ξ, $J\xi$ が M の法ベクトル場となるようにとっておく．すると $X, Y \in TM$ に対して, $\tilde{g}$ に関する $\widetilde{\nabla}_X Y$, $\widetilde{\nabla}_X \xi$ の直交分解

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)\xi + g(JAX, Y)J\xi \tag{3}$$

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -AX + s(X)J\xi \tag{4}$$

を得る. (A は TM 上の $(1,1)$ テンソル, s は M 上の 1 形式) この A を, M の shape operator と呼ぶことにする. この式により, 複素超曲面に対しても実超曲面のような議論が行えるが, A は $\mathrm{trace}\, A = 0$ を満たしていることに注意されたい。

5 hyperkähler 多様体からの reduction

初めに, hyperkähler 多様体の定義を振り返る.

Definition 5.1. (M, J_1, J_2, J_3, g) が hyperkähler 多様体であるとは, M 上の複素構造 J_1, J_2, J_3 が, 関係式

$$J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = J_1 J_2 J_3 = -id$$

を満たし, かつ $(M,\ J_i,\ g)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ が Kähler 多様体になる事とする.

標準的な計量を入れた $\mathbf{C}^{2n}$ には, compatible な hyperkähler 構造が入る. これを用いて, 以下の結果を得た.

Theorem 5.2. [3] $(J_1, J_2, J_3, \tilde{g})$ を標準的な $\mathbf{C}^{2n}$ の hyperkähler 構造とし, M を $\mathbf{C}^{2n}$ の複素超曲面する. このとき immersion $\phi : M \longrightarrow \mathbf{C}^{2n}$ により, $(J_1, J_2, J_3, \tilde{g})$ から M 上に誘導される構造は, 複素概接触計量構造の定義 (Definition 2.2.) を満たす.

実の場合においては, Tashiro [8] が同様の結果を示している.

Theorem 5.3. [8] $(\widetilde{M}, J, \tilde{g})$ を Kähler 多様体とし, M を $\widetilde{M}$ の実超曲面する. このとき immersion $\phi : M \longrightarrow \widetilde{M}$ により, M 上に概接触計量構造 (Φ, ξ, η, g) が定まる.

以下, M を $\mathbf{C}^{2n}$ の複素超曲面とし, (J, G, H, u, v, U, V, g) を Theorem 5.2. で定まる M 上の複素概接触計量構造とする. このとき, 講演者は以下の命題を示した.

Proposition 5.4. [3] $X,\ Y \in TM$ に対し, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}(\nabla_X G)Y &= -u(Y)AX + v(Y)JAX + g(AX, Y)U - g(JAX, Y)V,\\ (\nabla_X H)Y &= -u(Y)JAX - v(Y)AX + g(AX, Y)V + g(JAX, Y)U.\end{aligned}$$

Proposition 5.5. [3] $\nabla G,\ \nabla H$ は計量 g に関して skew-symmetric である.

Proposition 5.6. [3] 式 (4) における 1 形式 s は, 以下の関係式を満たす.

$$s(X) = -\sigma(X) = g(\nabla_X V,\ U) \quad (X \in TM)$$

6 今後の課題

今後は Theorem 5.2. で構成した複素概接触計量多様体と normality の関係を調べていく. まず, Ishihara-Konishi の結果を紹介する.

Proposition 6.1. [5] M 上の複素接触計量構造 (J, G, H, u, v, U, V, g) が normality を満たせば, (M, J, g) は Kähler 多様体になる.

しかし複素接触計量構造をもった Kähler 多様体が, normality を持つかどうかは不明である．そこで Theorem 5.2. で構成した複素概接触計量構造をもった複素超曲面は, Kähler 多様体であることを利用して, これが複素接触計量構造および normality の定義を満たすための条件を考える．まず 5 章で紹介した命題を用いることで, Definition 2.3. および式 (1), (2) は shape operator A を用いた式に書き直される．これは複素 (概) 接触計量構造 (J, G, H, u, v, U, V, g) の定義式が, 複素超曲面の満たすべき条件式に書き直されたことを意味する．本講演では, これらの条件についても触れる.

参考文献

[1] C. Baikoussis, D. Blair and F. Gouli-Andreou, *Holomorphic Legendre curves in the complex Heisenberg group*, Bull. inst math. Acad. Sinica, **26** (1998), 179-194.

[2] D. Blair, Riemannain Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, second edition, Progress in Mathematics 203, Birkhäuser, 2010.

[3] M. Imada, *Complex contact metric structures on complex hypersurfaces of* $\mathbf{C}^{2n}$, in preparation.

[4] M. Imada, *Construction of complex contact manifolds via reduction*, to appear in Tokyo J. Math..

[5] S. Ishihara and M. Konishi, *Complex almost contact manifolds*, Kōdai Math. J., **3** (1980), 385-396.

[6] S. Kobayashi, *Remarks on complex contact manifolds*, Proc. Amer. math. Soc., **10** (1959), 164-167.

[7] B. Smyth, *Geometry of complex hypersurfaces*, Ann. of Math., **85** (1967), 244-266.

[8] Y. Tashiro, *On contact structures of hypersurfaces in almost complex manifolds I.*, Tôhoku Math. J., **15** (1963), 62-78.