枠付き曲線の縮閉線について

本多 俊一（室蘭工業大学大学院 数理システム工学専攻）

1　序論

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の枠付き曲線に対して縮閉線を定義し，その性質を考える．枠付き曲線とは曲線と動標構の組である．曲線に対して正則性は仮定しない．枠付き曲線は独立性を持つ正則空間曲線と単位接束上のルジャンドル曲線の拡張となっており，これらに類似した曲率を持つ．正則空間曲線に対する縮閉線の定義はいくつかあるが，それらには自然と特異点が出てくる．そこで，枠付き曲線に対して縮閉線を定義することにより，枠付き曲線の曲率を介してその性質を考えることができる．考える写像は滑らか（C^∞級）とする．

2　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の枠付き曲線

I を区間または $\mathbb{R}$ とする．写像 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ が次の 3 つの条件をみたすとき**枠付き曲線**と呼ぶ：

$$(1)\ \dot{\gamma}(t)\cdot\nu_1(t) = 0,\ (2)\ \dot{\gamma}(t)\cdot\nu_2(t) = 0,\ (3)\ \nu_1(t)\cdot\nu_2(t) = 0.$$

また，(γ, ν_1, ν_2) が枠付き曲線であるような $(\nu_1, \nu_2) : I \to S^2 \times S^2$ が存在するとき，γ を**枠付き曲線**と呼ぶ.

枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ に対して $\boldsymbol{\mu}(t) := \nu_1(t) \times \nu_2(t)$ とすると $\{\nu_1(t), \nu_2(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の $\gamma(t)$ に沿う正の枠で，

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}_1(t) \\ \dot{\nu}_2(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) & m(t) \\ -\ell(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix},$$

$$\dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{\mu}(t)$$

を満たす．このとき，

$$\ell(t) = \dot{\nu}_1(t)\cdot\nu_2(t),\ m(t) = \dot{\nu}_1(t)\cdot\boldsymbol{\mu}(t),\ n(t) = \dot{\nu}_2(t)\cdot\boldsymbol{\mu}(t),\ \alpha(t) = \dot{\gamma}(t)\cdot\boldsymbol{\mu}(t)$$

である．この関数の組 (ℓ, m, n, α) を，**枠付き曲線の曲率**と呼ぶ.

ν_1，ν_2 の取り方には回転と鏡映による自由度がある．「枠付き曲線である」という性質は，パラメータの取り方や ν_1，ν_2 の取り方に依存しない．ただし，枠付き曲線の曲率は，パラメータの取り方や ν_1，ν_2 の取り方に依存することに注意しなければならない.

枠付き曲線の幾何的性質を考える為，枠付き曲線の合同を定義する．２つの枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2), $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}_1, \widetilde{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ に対して，$X \in SO(3)$ 及び $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ が存在して，

$$\widetilde{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) + \boldsymbol{x}, \quad \widetilde{\nu}_1(t) = X(\nu_1(t)), \quad \widetilde{\nu}_2(t) = X(\nu_2(t))$$

を満たすとき，２つの枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}_1, \widetilde{\nu}_2)$ は**合同であると言う**．

枠付き曲線は次の性質を持つ：

定理 1（枠付き曲線の存在)([2])

$(\ell, m, n, \alpha) : I \to \mathbb{R}^4$ を滑らかな写像とする．このとき，枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ で，(ℓ, m, n, α) を曲率とするものが存在する．

定理 2（枠付き曲線の一意性)([2])

２つの枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2), $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}_1, \widetilde{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ に対して，これらの曲率が一致するとする．このとき，２つの枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}_1, \widetilde{\nu}_2)$ は合同である．

特に，２つの枠付き曲線が合同な場合，それらの曲率は一致する．つまり，合同の差を除き，枠付き曲線の幾何的性質を曲率が定めている事が分かる．よって，この意味で枠付き曲線の曲率は，枠付き曲線の重要な不変量になっている．

3 枠付き曲線の縮閉線

フレネ枠 $\{T(t), N(t), B(t)\}$ を持つ正則空間曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ の曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$ が $\kappa(t) \neq 0$，$\tau(t) \neq 0$ を満たすとき，その接触球の中心は次で与えられる ([1])：

$$E_v(\gamma)(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t) - \frac{\dot{\kappa}(t)|\dot{\gamma}(t)|}{\kappa^2(t)\tau(t)} B(t).$$

本節で定義する枠付き曲線の縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)$ は正則空間曲線の接触球の中心 $E_v(\gamma)$ の拡張となっている．

枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) とその曲率 (ℓ, m, n, α) に対して，

$$f(t) := \ell(t)(m^2(t) + n^2(t)) + \begin{vmatrix} m(t) & n(t) \\ \dot{m}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

を仮定する．$f(t) \neq 0$ ならば $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ が成り立つ．縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$ を次で定義する：

定義 3（枠付き曲線の縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)$)

$$\mathcal{E}_v(\gamma)(t) = \gamma(t) - \frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & n(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix} + \alpha(t)\ell(t)m(t)}{f(t)} \nu_1(t) + \frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & m(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{m}(t) \end{vmatrix} - \alpha(t)\ell(t)n(t)}{f(t)} \nu_2(t)$$

このとき，縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)$ が再び $f^1(t) \neq 0$ を満たす枠付き曲線になることがわかる．実際，$(\mathcal{E}_v(\gamma), \nu_1^1, \nu_2^1)$ は枠付き曲線である．ただし，

$$\nu_1^1(t) = \boldsymbol{\mu}(t),\ \nu_2^1(t) = \frac{1}{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}}(m(t)\nu_1(t) + n(t)\nu_2(t)),\ \boldsymbol{\mu}^1(t) = \nu_1^1(t) \times \nu_2^1(t)$$

とする．このとき，曲率は

$$\ell^1(t) = -\sqrt{m^2(t)+n^2(t)}, \quad m^1(t) = 0, \quad n^1(t) = \frac{f(t)}{m^2(t)+n^2(t)},$$

$$\alpha^1(t) = n(t)\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & n(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix} + \alpha(t)\ell(t)m(t)}{f(t)}\right) + \ell(t)\left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & m(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{m}(t) \end{vmatrix} - \alpha(t)\ell(t)n(t)}{f(t)}\right)\right)$$
$$+ m(t)\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & m(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{m}(t) \end{vmatrix} - \alpha(t)\ell(t)n(t)}{f(t)}\right) - \ell(t)\left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & n(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix} + \alpha(t)\ell(t)m(t)}{f(t)}\right)\right)$$

である．よって，

$$f^1(t) = -\frac{(f(t))^2}{(m^2(t)+n^2(t))^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

が成り立ち，自然に縮閉線の縮閉線が与えられることがわかる．

枠付き曲線の曲率は，パラメータの取り方や枠の取り方に依存するが，それらによって表示される縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)$ はパラメータの取り方や枠の取り方に依存しない．また，関数 $F : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(t, \boldsymbol{v}) \mapsto (\gamma(t) - \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\mu}(t)$ に対して

$$F(t, \boldsymbol{v}) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \boldsymbol{v}) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, \boldsymbol{v}) = 0$$

を満たすような $\boldsymbol{v}$ は枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) の $\mathcal{E}_v(\gamma)$ であることがわかる．これらは枠付き曲線の縮閉線を考える上で重要な性質である．

以下，縮閉線の縮閉線を考える．記号として $\mathcal{E}_v^0(\gamma)(t) := \gamma(t)$ と $\mathcal{E}_v^1(\gamma)(t) := \mathcal{E}_v(\gamma)(t)$ と置く．帰納的に自然数 k に対して，$\mathcal{E}_v^k(\gamma)(t) := \mathcal{E}_v(\mathcal{E}_v^{k-1}(\gamma))(t)$ と定義し，

$$\nu_1^k(t) = \begin{cases} \nu_1^1(t) & (k : \text{奇数}) \\ \boldsymbol{\mu}^1(t) & (k : \text{偶数}) \end{cases}, \quad \nu_2^k(t) = \begin{cases} \nu_2^1(t) & (k : \text{奇数}) \\ -\nu_2^1(t) & (k : \text{偶数}) \end{cases},$$

$$\ell^k(t) = \begin{cases} \ell^1(t) & (k : \text{奇数}) \\ n^1(t) & (k : \text{偶数}) \end{cases}, \quad n^k(t) = \begin{cases} n^1(t) & (k : \text{奇数}) \\ \ell^1(t) & (k : \text{偶数}) \end{cases},$$

$$\alpha^k(t) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha^{k-1}(t) & n^{k-1}(t) \\ \dot{\alpha}^{k-1}(t) & \dot{n}^{k-1}(t) \end{vmatrix}}{\ell^{k-1}(t)(n^{k-1}(t))^2}\right) + \frac{\alpha^{k-1}(t)\ell^{k-1}(t)}{n^{k-1}(t)} \ (k \geq 2)$$

とする．このとき，次が成り立つ．

定理 4（k-回の縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)$）

k 回の枠付き曲線の縮閉線は $k = 1$ のとき $\mathcal{E}_v(\gamma)(t)$ で与えられ，$k \geq 2$ のとき

$$\mathcal{E}_v^k(\gamma)(t) = \mathcal{E}_v^{k-1}(\gamma)(t) - \frac{\begin{vmatrix} \alpha^{k-1}(t) & n^{k-1}(t) \\ \dot{\alpha}^{k-1}(t) & \dot{n}^{k-1}(t) \end{vmatrix}}{\ell^{k-1}(t)(n^{k-1}(t))^2}\nu_1^{k-1}(t) - \frac{\alpha^{k-1}(t)}{n^{k-1}(t)}\nu_2^{k-1}(t)$$

で与えられる．このとき，$(\mathcal{E}_v^k(\gamma)(t), \nu_1^k(t), \nu_2^k(t))$ は枠付き曲線であり，その曲率は $(\ell^k(t), 0, n^k(t), \alpha^k(t))$ である．

例

3 次元アステロイド $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ （図 1）に対して，ν_1，ν_2 を次のように与える：

$$\nu_1(t) = (-\sin t, -\cos t, 0),\ \nu_2(t) = \frac{1}{5}(-4\cos t, 4\sin t, 3).$$

このとき，(γ, ν_1, ν_2) は枠付き曲線であり，

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \nu_1(t) \times \nu_2(t) = \frac{1}{5}(-3\cos t, 3\sin t, -4)$$

である事から，枠付き曲線の曲率は

$$\ell(t) = \frac{4}{5}, \quad m(t) = \frac{3}{5}, \quad n(t) = 0, \quad \alpha(t) = 5\cos t \sin t$$

となる．このとき，縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)$ （図 2）は次の通りである：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_v(\gamma)(t) = (&\cos^3 t + \frac{25}{3}\cos t \sin^2 t + \frac{25}{3}\cos t(\cos^2 - \sin^2 t), \\ &\sin^3 t + \frac{25}{3}\cos^2 \sin t - \frac{25}{3}\sin t(\cos^2 t - \sin^2 t), \cos 2t - \frac{25}{4}(\cos^2 t - \sin^2 t)).\end{aligned}$$

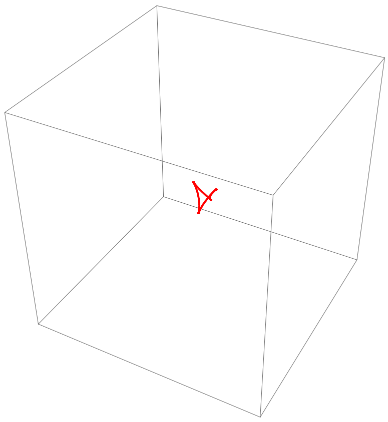

図 1　3 次元アステロイド $\gamma(t)$

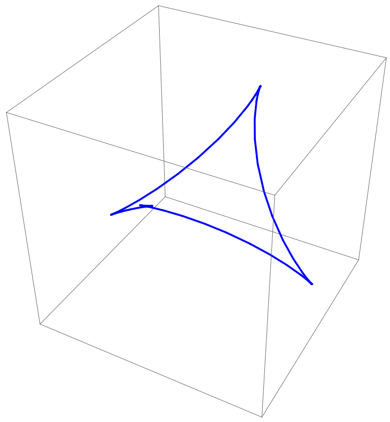

図 2　3 次元アステロイドの縮閉線 $\mathcal{E}_v(\gamma)(t)$

参考文献

[1] D. Fuchs, Evolutes and Involutes of Spatial Curves, *Amer. Math. Monthly.* **120** (2013), 217-231.

[2] S. Honda and M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, to appear in Advances in Geometry.

[3] S. Honda and M. Takahashi, Evolutes of framed curves in the Euclidean space, in preparation.