ON THE DESCENT OF MODULAR CALABI-YAU VARIETIES ARISING FROM THE CYNK-HULEK CONSTRUCTION

平川 義之輔（Yoshinosuke Hirakawa）
慶應義塾大学大学院理工学研究科　後期博士課程１年　（hirakawa@a2.keio.jp）

Abstract. 本稿では, 谷山-志村予想の高次元化への 1 つのアプローチとして, ある種の Calabi-Yau 多様体の L 関数と楕円 Hecke 固有新形式の L 関数との関係を主張する Mazur と van Straten の予想を紹介した後, 現在までに知られている結果の紹介, 及び最近筆者により得られた結果の紹介を行う.

1. Mazur と van Straten の予想

タイトルにある Calabi-Yau 多様体とは, 以下のような代数多様体のことである.

定義 1.1. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の滑らかな n 次元射影代数多様体 X が（狭義の）Calabi-Yau 多様体であるとは, 以下の 2 つが成り立つことである.

$$\text{(i) } \Omega_X^i(X) = 0 \ (1 \leq \forall i \leq n-1), \text{ (ii) } \Omega_X^n(X) \simeq \mathbb{C}$$

また, 部分体 $F \subset \mathbb{C}$ 上の滑らかな n 次元射影代数多様体 X が Calabi-Yau 多様体であるとは, X の $\mathbb{C}$ への基底変換 $X_{\mathbb{C}}$ が $\mathbb{C}$ 上の Calabi-Yau 多様体となることである.

有理点を 1 つでも持つ 1 次元 Calabi-Yau 多様体は, 楕円曲線に他ならない. 谷山-志村予想とは, 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線に関する以下のような予想（現在は定理）である.

定理 1.2. *$\mathbb{Q}$ 上の任意の楕円曲線 E は保型的である. すなわち, 各 E に対して, ある重さ 2 の楕円 Hecke 固有新形式 f が存在し, $L(E,s) = L(f,s)$ が成り立つ.*

谷山-志村予想の高次元 Calabi-Yau 多様体への拡張は極めて自然な問題であるが, この予想をより一般の代数多様体にも拡張した Langlands 予想の解決の見通しは立っていない. そこで, 保型的な Calabi-Yau 多様体を具体的に構成し, またそれらを考察することで, ある種の Calabi-Yau 多様体と楕円 Hecke 固有新形式との対応関係を理解することを試みる. これに対して, Mazur と van Straten により, 次のような予想が提示された.

予想 1.3. *$\mathbb{Q}$ 係数 Fourier 展開を持つ重さ $n+1$ の任意の楕円 Hecke 固有新形式 f に対して, ある n 次元 Calabi-Yau 多様体 X, 及び部分モチーフ $t^n(X) \subset h^n(X)$ が存在し, $L(t^n(X), s) = L(f,s)$ が成り立つ. すなわち, f の L 関数は X の L 関数の因子として実現される.*

注意 1.4. 楕円曲線の自然な高次元化には, Calabi-Yau 多様体以外にも Abel 多様体が知られているが, 予想 1.3 の Abel 多様体類似は一般には成立しないことを注意しておく. 例えば、$\mathbb{Q}$ 係数 Fourier 展開を持つ重さ 3 の楕円 Hecke 固有新形式で, その L 関数が $\mathbb{Q}$ 上の 2 次元 Abel 多様体の L 関数の因子としては決して得られないものが存在する. (cf. [ES])

$n \leq 2$ の場合には, 予想 1.3 を支持する結果が得られている.

定理 1.5. *(i) 予想 1.3 は* $n=1$ *のとき正しい.*

(ii) ([ES]) Dirichlet L *関数に対する一般化された Riemann 予想を仮定すると, 予想 1.3 は* $n=2$ *のとき正しい.*

(i) は楕円曲線のモジュライ空間であるモジュラー曲線の Jacobi 多様体の考察, (ii) はある種の 2 次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間である志村曲線, 及びそれでパラメタ付けられる楕円曲面族の考察が核心である. しかし, 高次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間の構成は困難であり, 従って $n \leq 2$ の場合の方法を直接高次元化することも困難である.

2. Cynk と Hulek による帰納的な構成

一方で, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線のような保型的な代数多様体から代数幾何学的な操作を通じて Calabi-Yau 多様体を構成することができれば, もとの代数多様体の保型性を経由して Calabi-Yau 多様体の保型性を証明できる可能性がある. 実際, Cynk と Hulek は, 以下に述べる方法で保型的な高次元 Calabi-Yau 多様体の族を帰納的に構成することに成功した.

まず, 2 つの楕円曲線 E_1, E_2 及びそれぞれの Abel 群構造に関する標準的な対合 ι_1, ι_2 に対して, 商多様体 $E_1 \times E_2/\iota_1 \times \iota_2$ の極小特異点解消として 2 次元 Calabi-Yau 多様体 X_2 を得る. X_2 は自然に $E_1/\iota_1 \times E_2/\iota_2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆と見なせるので, その被覆変換を τ_2 とする. 次に, 楕円曲線 E_3 及び E_3 上の標準的な対合 ι_3 に対して, $X_2 \times E_3/\tau_2 \times \iota_3$ の特異点解消として 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X_3 を構成できる. X_3 も X_2 と同様に, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆と見なせるので, 以下同様にして n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_n を構成できる.

定理 2.1. *([CH])* $E_1, \dots, E_n$ *を* $\mathbb{Q}$ *上の楕円曲線,* $f_1, \dots, f_n$ *をそれぞれ* $L(E_i, s) = L(f_i, s)$ *を満たす楕円 Hecke 固有新形式とする. このとき, 上で構成した* n *次元 Calabi-Yau 多様体* X_n *は* $\mathbb{Q}$ *上のモデルを持ち, 以下が成り立つ.*

$$L(h^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = L(\bigotimes_{i=1}^{n} f_i, s) \ (n : \text{奇数})$$
$$L(t^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = L(\bigotimes_{i=1}^{n} f_i, s) \ (n : \text{偶数}, t^n(X_n/\mathbb{Q}) \subset h^n(X_n/\mathbb{Q}) : \text{部分モチーフ})$$

ただし, $L(\bigotimes_{i=1}^{n} f_i, s)$ *は* f_i *に対応する Galois 表現のテンソル表現の* L *関数を表す。*

系 2.2. *([CH]) 定理 2.1 の仮定の下で, さらに* $E_1, \dots, E_n$ *はすべて* $\mathbb{Q}$ *上同型で, 類数 1 の虚 2 次体* $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ *上で* $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ *に虚数乗法を持つと仮定する. このとき, 以下が成り立つ.*

$$L(h^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = L(g_n, s)^{\binom{n}{0}} L(g_{n-2}, s-1)^{\binom{n}{1}} \cdots L(g_1, s - \frac{n-1}{2})^{\binom{n}{\frac{n-1}{2}}} \ (n : \text{奇数})$$
$$L(t^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = L(g_n, s)^{\binom{n}{0}} L(g_{n-2}, s-1)^{\binom{n}{1}} \cdots L(g_2, s - \frac{n-2}{2})^{\binom{n}{\frac{n-2}{2}}} L(\chi_{-d}, s - \frac{n}{2})^{\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}}$$
$$\times \zeta(s - \frac{n}{2})^{\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}} \ (n : \text{偶数}, t^n(X_n/\mathbb{Q}) \subset h^n(X_n/\mathbb{Q}) : \text{部分モチーフ})$$

ただし, $L(g_k, s)$*,* $L(\chi_{-d}, s)$*, 及び* $\zeta(s)$ *は, それぞれ重さ* $k+1$ *の楕円 Hecke 固有新形式の* L *関数,* $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ *に付随する Dirichlt* L *関数, 及び Riemann* ζ *関数を表す.*

3. $\mathbb{Q}$-楕円曲線と Weil 係数制限関手

定義 3.1. 代数体 F 上の楕円曲線 E が $\mathbb{Q}$-楕円曲線であるとは, E と $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 共役な任意の楕円曲線と E 自身とが $\overline{\mathbb{Q}}$ 上同種であることである.

$\mathbb{Q}$ 上の任意の楕円曲線は $\mathbb{Q}$-楕円曲線であるが, 逆は成り立たない. しかし, $\mathbb{Q}$-楕円曲線は $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とよく似た数論的な性質を持つ. 実際, 系 2.2 と全く同様にして以下の命題を証明することができる.

命題 3.2. *H を虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ の Hilbert 類体, E を $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ に虚数乗法を持つ H 上の $\mathbb{Q}$-楕円曲線, $E_1 = E, E_2, \ldots . E_n$ を（重複を許した）E と $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 共役な楕円曲線, ψ, 及び $\overline{\psi}$ をそれぞれ E/H から定まる H の Hecke 指標, 及びその複素共役とする. このとき, 定理 2.1 と同様に構成した n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_n は H 上のモデルを持ち, 以下が成り立つ.*

$$
\begin{aligned}
L(h^n(X_n/H), s) =& L(\psi^{n+1}, s)^{\binom{n}{0}} L(\psi^{n-1}, s-1)^{\binom{n}{1}} \cdots L(\psi, s - \frac{n-1}{2})^{\binom{n}{\frac{n-1}{2}}} \\
&\times L(\overline{\psi}^{n+1}, s)^{\binom{n}{0}} L(\overline{\psi}^{n-1}, s-1)^{\binom{n}{1}} \cdots L(\overline{\psi}, s - \frac{n-1}{2})^{\binom{n}{\frac{n-1}{2}}} \ (n : \text{奇数}) \\
L(t^n(X_n/H), s) =& L(\psi^{n+1}, s)^{\binom{n}{0}} L(\psi^{n-1}, s-1)^{\binom{n}{1}} \cdots L(\psi^2, s - \frac{n-2}{2})^{\binom{n}{\frac{n-2}{2}}} \\
&\times L(\overline{\psi}^{n+1}, s)^{\binom{n}{0}} L(\overline{\psi}^{n-1}, s-1)^{\binom{n}{1}} \cdots L(\overline{\psi}^2, s - \frac{n-2}{2})^{\binom{n}{\frac{n-2}{2}}} \\
&\times \zeta_H(s - \frac{n}{2})^{\binom{n}{\frac{n}{2}}} \ (n : \text{偶数}, t^n(X_n/H) \subset h^n(X_n/H) : \text{部分モチーフ})
\end{aligned}
$$

ただし, $L(\psi, s)$, 及び $\zeta_H(s)$ は, それぞれ ψ に付随する Hecke L 関数, 及び H 上の Dedekind ζ 関数を表す.

そこで, 楕円曲線そのものの定義体は $\mathbb{Q}$ に降下できなくとも, このように構成した Calabi-Yau 多様体 X_n が $\mathbb{Q}$ 上のモデルを持てば, 系 2.2 では実現できなかった楕円 Hecke 固有新形式も X_n の L 関数の因子として実現できるであろうと期待される. 実際, Cynk と Schütt は以下の定理を証明した.

定理 3.3. *([CS]) $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ の類数が 3 のとき, 命題 3.2 で楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(j_E)$ から構成した 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X_3 は $\mathbb{Q}$ 上のモデルを持ち, 以下が成り立つ.*

$$L(h^3(X_3/\mathbb{Q}), s) = L(g_3, s)L(\psi, s-1)$$

ただし, $L(g_3, s)$, 及び $L(\psi, s)$ は, それぞれ重さ $3+1=4$ の楕円 Hecke 固有新形式の L 関数, 及び $E/\mathbb{Q}(j_E)$ から定まる Hecke 指標 ψ に付随する Hecke L 関数を表し, このような $L(g_3, s)$ は系 2.2 で得られたものたちとは重複しない.

定理 3.3 の証明の核心は, X_3 の構成に用いる楕円曲線の直積 $E_1 \times E_2 \times E_3$ を, E の Weil 係数制限関手による像 $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}(E)$ と見なすことで, 多様体の定義体を H あるいは $\mathbb{Q}(j_E)$ から $\mathbb{Q}$ へ降下することである. しかし, 一般には Weil 係数制限関手によって直積型の多様体の定義体を降下できたとしても, 商多様体やその特異点解消の定義体を降下できるとは限らないため, Cynk と Schütt による降下法は 4 次元以上の場合には上手く機能しない.

4. 主結果

そこで, 特異点解消を経由せず, 高次元 Calabi-Yau 多様体を帰納的に構成することを考える. 以下では, Calabi-Yau 多様体上に帰納的に定まる不分岐対合を用いることで, 特異点解消を経由することなく 2^p 次元 Calabi-Yau 多様体を帰納的に構成し, かつ定義体を順次降下するという, 筆者により得られた Calabi-Yau 多様体の構成方法を述べる.

$F = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_p = \mathbb{Q}$ を $[F_i : F_{i+1}] = 2$ かつ $\mathrm{Gal}(F_i/F_{i+1}) = \langle \sigma_i \rangle$ なる代数体の降下列とし, E を F 上の楕円曲線, ι を E 上の標準的な対合とする. さらに, E は F 上定義された位数 2 の点 P を含むと仮定する. まず, Weil 係数制限関手の関手性から, 商多様体 $\mathrm{Res}_{F_0/F_1}(E)/\iota \times \iota^{\sigma_0}$ の極小特異点解消 X_2 は F_1 上の 2 次元 Calabi-Yau 多様体を定める. $p = 1$ ならば, X_2 が既に $\mathbb{Q}$ 上定義されているが, $p \geq 2$ の場合はさらに定義体を降下したい. そこで, 2 次元 Abel 多様体 $(\mathrm{Res}_{F_0/F_1}(E))_{F_0} \simeq E \times E^{\sigma_0}$ 上の対合

$$(P_1, P_2) \mapsto (P_1 + P, -P_2 + P^{\sigma_0})$$

が誘導する $(X_2)_{F_0}$ 上の不分岐対合 ϵ_2 を考えると, X_2 上の楕円曲面構造から ϵ_2 は F_1 上定義されることが分かる. 従って, F_2 上の滑らかな 4 次元射影代数多様体 $X_4 = \mathrm{Res}_{F_1/F_2}(X_2)/\epsilon_2 \times \epsilon_2^{\sigma_1}$ を得るが, Cynk と Hulek による議論と同様にして X_4 が 4 次元 Calabi-Yau 多様体であることも分かる. さらに, 構成から X_4 は $\mathrm{Res}_{F_1/F_2}(X_2/\epsilon_2)$ の不分岐 2 重被覆と見なせるので, その被覆変換を ϵ_4 とすると, $p \geq 3$ の場合にも同様に, $X_8 = \mathrm{Res}_{F_2/F_3}(X_4)/\epsilon_4 \times \epsilon_4^{\sigma_2}$ が F_3 上の 8 次元 Calabi-Yau 多様体であることが分かる. $p \geq 4$ の場合にも, このようにして帰納的に構成した X_{2^p} が $\mathbb{Q}$ 上の 2^p 次元 Calabi-Yau 多様体であることが分かる.

以下が本稿の主結果である.

定理 4.1. *E を $F = \mathbb{Q}(j_E)$ 上の $\mathbb{Q}$-楕円曲線とする. また, E は F 上に位数 2 の点を持ち, かつ $H = F(\sqrt{-d})$ 上で類数 2^p の虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ に虚数乗法を持つと仮定する. このとき, 上で構成された $\mathbb{Q}$ 上の 2^p 次元 Calabi-Yau 多様体 X_{2^p} は, 以下を満たす.*

$$\begin{aligned} L(t^{2^p}(X_{2^p}/H), s) =& L(\psi^{2^p+1}, s)^{\binom{2^p}{0}} L(\psi^{2^p-1}, s-1)^{\binom{2^p}{1}} \cdots L(\psi^2, s-2^{p-1}+1)^{\binom{2^p}{2^{p-1}-1}} \\ & \times L(\overline{\psi}^{2^p+1}, s)^{\binom{2^p}{0}} L(\overline{\psi}^{2^p-1}, s-1)^{\binom{2^p}{1}} \cdots L(\overline{\psi}^2, s-2^{p-1}+1)^{\binom{2^p}{2^{p-1}-1}} \\ & \times \zeta_H(s-2^{p-1})^{\binom{2^p}{2^{p-1}}} \ (t^{2^p}(X_{2^p}/H) \subset h^{2^p}(X_{2^p}/H) : \text{部分モチーフ}) \end{aligned}$$

ただし, ψ 及び $\overline{\psi}$ は E/H から定まる H の Hecke 指標及びその複素共役である.

今後は, $t^{2^p}(X_{2^p}/H)$ を $\mathbb{Q}$ 上のモチーフに降下し, その L 関数を楕円 Hecke 固有新形式の L 関数で記述することで, 定理 3.3 を高次元化することが課題である.

References

[CH] S. Cynk and K. Hulek, Higher-dimensional modular Calabi-Yau manifolds, Canad. Math. Bull., **50** (4), 2007, 486-503.

[CS] S. Cynk and M. Schütt, Generalized Kummer constractions and Weil restrictions, Journal of Number Theory, **129**, 2009, 1965-1975.

[ES] N. D. Elkies and M. Schütt, Modular forms and K3 surfaces, Advances in Mathematics, **240**, 2013, 106-131.