準相対論的なPauli-Fierz模型のスペクトル解析

日高建* （九州大学大学院数理学研究院）

1　はじめに

本研究は，九州大学の廣島文生先生との共同研究に基づくものである．粒子と量子場が相互作用をする系を考える．非相対論的Pauli-Fierz模型は，量子電磁力学の模型で，非相対論的な粒子と量子輻射場 A がミニマル結合したものである．粒子は，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上シュレーディンガー作用素 $-\frac{1}{2M}p^2+V$ に従うとする．ここで，M は粒子の質量であり，$p=-i\nabla$ は粒子の運動量，V は外部ポテンシャルである．また，ヒルベルト空間 $\mathscr{F}$ 上で作用する自由場のハミルトニアンを $\mathrm{H_f}$ とする．このとき，非相対論的Pauli-Fierz模型の全ハミルトニアンは，$L^2(\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{F}$ 上で

$$H_{PF}=\frac{1}{2M}\left(p\otimes\mathbb{1}-A\right)^2+V\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\mathrm{H_f}$$

となる．[Hir00, Hir02, HH08] において，H_{PF} は $\mathcal{H}$ 上の下に有界な自己共役作用素であることが示されている．ハミルトニアンのスペクトルの下限を基底エネルギーといい，それに対応する固有ベクトルを基底状態という．基底エネルギーがハミルトニアンの固有値でなければ，基底状態は存在しない．非相対論的Pauli-Fierz模型のハミルトニアン H_{PF} は基底状態をもつことが [BFS99, GLL01, Hir99] 等で証明されている．

一方, 準相対論的なPauli-Fierz模型は, 量子輻射場 A と準相対論的なシュレーディンガー作用素 $\sqrt{p^2+M^2}+V$ に従う粒子がミニマル結合した模型である．[KMS11, KM12] において, 静止質量 M が正の場合に H が基底状態をもつことは既に示されている．ハミルトニアンの自己共役性と基底状態の存在を $M=0$ の場合も含めて示すことが目的である．

2　準備

複素ヒルベルト空間 $W=\oplus^{d-1}L^2(\mathbb{R}^d)$, $d\geq 3$ 上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}$ は $\mathscr{F}=\oplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n(W)=\oplus_{n=0}^{\infty}\left[\otimes_s^n W\right]$ で与えられる．ここで，$\otimes_s^n$ は n 重対称テンソル積を表す．

*email: t-hidaka@math.kyushu-u.ac.jp

また，$\otimes_s^0 W = \oplus^{d-1}\mathbb{C}$ とする．$\mathscr{F}$ のベクトルは $(\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \cdots)$, $\Psi^{(n)} \in \otimes_s^n W$ と表せる．$\Omega = (1, 0, \cdots) \in \mathscr{F}$ をボソンフォック真空という．次に，フォック空間上の重要な作用素を導入する．$f \in W$ によって均された（ボソン）生成作用素 $a^\dagger(f)$ と（ボソン）消滅作用素 $a(f)$ を次のように定義する．

$$D\left(a^\dagger(f)\right) = \left\{ \Psi \in \mathcal{F} \;\Big|\; \sum_{n=1}^{\infty} n \left\| S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}) \right\|^2 < \infty \right\},$$
$$\left(a^\dagger(f)\Psi\right)^{(n)} = \sqrt{n} S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}), n \geq 1, \quad \left(a^\dagger(f)\Psi\right)^{(0)} = 0,$$
$$a(f) = (a^\dagger(f))^*.$$

ここで，$D(T)$ は線形作用素 T の定義域を表す．$a(f)$ と $a^\dagger(f)$ は次の正準交換関係を満たす:

$$[a(f), a^\dagger(g)] = (\bar{f}, g)_W, \qquad [a(f), a(g)] = 0 = [a^\dagger(f), a^\dagger(g)].$$

$\tilde{f} = (0, \cdots, 0, \overset{r-\mathrm{th}}{f}, 0, \cdots, 0) \in W$ に対して，$a^r(f) = a(\tilde{f})$ と表す．稠密に定義された W 上の可閉作用素 T に対して，第二量子化作用素 $d\Gamma(T)$ を

$$d\Gamma(T) = \oplus_{n=0}^{\infty} \left[\otimes^n T^{(n)} \right]$$

によって定義する．ここで，$T^{(n)}$ は

$$T^{(0)} = 0, \quad T^{(n)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} 1 \otimes \cdots 1 \otimes \overset{k-\mathrm{th}}{T} \otimes 1 \cdots \otimes 1|_{\otimes_s D(T)}}$$

である．

2.1 準相対論的な Pauli-Fierz 模型

準相対論的な Pauli-Fierz 模型における状態ヒルベルト空間を $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{F}$ とする．静止質量が $M \geq 0$ のとき準相対論的なシュレーディンガー作用素は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で

$$\sqrt{p^2 + M^2} + V \tag{2.1}$$

によって与えられる．外部ポテンシャル V に以下の仮定をする．

Definition 2.1 次の条件 *(1)* を満たす V の集合を V_{rel}，*(2)* を満たす V の集合を V_{conf} とする．

(1) $D(\sqrt{p^2 + M^2}) \subset D(V)$ であり，ある $0 \leq a < 1$ と $b \geq 0$ が存在して，

$$\|Vf\| \leq a \|\sqrt{p^2 + M^2} f\| + b\|f\|$$

が任意の $f \in D(\sqrt{p^2 + M^2})$ に対して成立する．

(2) $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ は非負であり，$\mu = 1, ..., d$ に対して $D_\mu V$, $D^2_\mu V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. さらに，$D(V) \subset D(|x|)$.

運動量 $k \in \mathbb{R}^d$ におけるボソン1個のエネルギーを表す関数を $\omega(k)$ とする．

Assumption 2.2 $\omega \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, $\nabla\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\inf_{k\in\mathbb{R}^d} \omega(k) = m \geq 0$, $\lim_{|k|\to\infty} \omega(k) = \infty$.

この仮定における $m > 0$ はボソンの仮想的な質量を表す．自由場のハミルトニアン $\mathrm{H_f}$ は W 上の掛け算作用素 $\oplus^{d-1}\omega$ の第二量子化作用素として与えられる．従って，

$$\mathrm{H_f} = d\Gamma(\oplus^{d-1}\omega).$$

d 次元偏光ベクトル $e^r(k) = (e^r_1(k), ..., e^r_d(k))$ は，$k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ と $r = 1, ..., d-1$ に対して $e^r(k) \cdot e^s(k) = \delta_{rs}$ と $k \cdot e^r(k) = 0$ を満たすベクトルとして与えられる．$\hat{\varphi}$ を以下の仮定を満たす紫外切断関数とする．

Assumption 2.3 $\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}, \omega\sqrt{\omega}\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\hat{\varphi}(k) = \overline{\hat{\varphi}(-k)}$.

各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，量子輻射場 $A(x) = (A_1(x), ..., A_d(x))$ は $\mathscr{F}$ 上で次のように与えられる．

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^{d-1} \left\{ a^{\dagger r}\left(\frac{\hat{\varphi} e^r_\mu e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{\omega}} \right) + a\left(\frac{\hat{\varphi}(-\cdot) e^r_\mu e^{ik\cdot x}}{\sqrt{\omega}} \right) \right\}.$$

$\hat{\varphi}(k) = \overline{\hat{\varphi}(-k)}$ ならば $A_\mu(x)$ は本質的に自己共役である． 自己共役拡大も同じ記号 $A_\mu(x)$ で表すことにする．$\mathscr{H}$ は $\int^\oplus_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F} \mathrm{d}x = L^2(\mathbb{R}^d;\mathscr{F})$ と同一視できる．

次に，ミニマル相互作用 $p \to p \otimes 1\!\!1 - A$ を導入して全ハミルトニアンを定義する．$(p \otimes 1\!\!1 - A)^2$ の本質的自己共役性について次のことが知られている．

Proposition 2.4 *Assumption 2.2* と *2.3* を満たすとする．このとき，$D(p^2 \otimes 1\!\!1) \cap C^\infty(1\!\!1 \otimes N)$ 上で $(p \otimes 1\!\!1 - A)^2$ は本質的に自己共役である．ここで，$C^\infty(1\!\!1 \otimes N) = \cap^\infty_{n=1} D(1\!\!1 \otimes N^n)$ である．

$(p \otimes 1\!\!1 - A)^2$ の自己共役拡大も同じ記号で表す．スペクトル分解定理によって自己共役作用素 $\sqrt{(p \otimes 1\!\!1 - A)^2 + M^2}$ を定義する．準相対論的な Pauli-Fierz 模型は $\mathscr{H}$ 上で

$$H = \sqrt{(p \otimes 1\!\!1 - A)^2 + M^2} + V \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f},$$

$$D(H) = D(\sqrt{(p \otimes 1\!\!1 - A)^2 + M^2}) \cap D(V \otimes 1\!\!1) \cap D(1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f}).$$

によって定義される．

$$\mathscr{H}_{\mathrm{fin}} = L.H.\{f \otimes \Omega,\ f \otimes a^\dagger(h_1) \cdots a^\dagger(h_n)\Omega | h_j \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d), j = 1, \cdots, n, n \geq 1\}.$$

とおく．

3　主定理

Theorem 3.1 $V \in V_{\mathrm{conf}} \cup V_{\mathrm{rel}}$ とし，*Assumption 2.2* と *2.3* を満たすとする．このとき，H は下に有界な作用素で，$D(|p|) \cap D(V) \cap D(\mathrm{H_f})$ 上で自己共役，$\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ 上で本質的に自己共役である．

Theorem 3.2 $m > 0$，$V \in V_{\mathrm{conf}}$，$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$ とし，*Assumption 2.2* と *2.3* を仮定する．$\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ を H の本質的スペクトルとする．このとき，すべての $M \geq 0$ に対して $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [E+m, \infty)$ が成立する． また，基底状態は一意的である．即ち，E を H の基底エネルギーとすると，

$$\dim \ker(H - E) = 1.$$

参考文献

[BFS99] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation fields, *Commun. Math. Phys.* **207** (1999), 249–290.

[GLL01] M. Griesemer, E. H. Lieb and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. Math.* **145** (2001), 557–595.

[HH08] D. Hasler and I. Herbst, On the self-adjointness and domain of Pauli-Fierz type Hamiltonians, *Rev. Math. Phys.* **20** (2008), 787-800.

[Hir99] F. Hiroshima, Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics II, *J. Math. Phys.* **41** (2000), 661-674.

[Hir00] F.Hiroshima, Essential self-adjointness of translation-invariant quantum field models for arbitrary coupling constants *Comm. Math. Phys.* **211**, (2000), 585-613.

[Hir02] F. Hiroshima, Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants, *Ann. H. Poincaré* **3** (2002), 171-201.

[KMS11] M. Könenberg, O. Matte and E. Stockmeyer, Existence of ground states of hydrogen-like atoms in relativistic QED I: the semi-relativistic Pauli-Fierz operator *Rev. Math. Phys* **23** (2011), 375–407.

[KM12] M. Könenberg and O. Matte, Ground states of semi-relativistic Pauli-Fierz and no-pair Hamiltonians in QED at critical Coulomb coupling, arXiv:1106.1393.